TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Breithof

Imprimerie PEETERS-RUELENS. — Louvain.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR

N. BREITHOF

Commandeur de l'Ordre Royal Portugais du Christ
Ingénieur des mines et des arts et manufactures
Professeur à la faculté des sciences de l'Université de Louvain
Membre correspondant de l'Académie Royale des sciences de Madrid
de l'Académie des « Nuovi Lincei » à Rome et de l'Institut R.-G.-D. de Luxembourg, etc

PREMIÈRE PARTIE — TEXTE

POINT — LIGNE DROITE — PLAN

SECONDE ÉDITION

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, Imprimeur-Éditeur
Quai des Grands-Augustins, 55

LOUVAIN
D. Aug PEETERS-RUELENS
Imprimeur-Éditeur

MONS
Hector MANCEAUX
Imprimeur-Editeur

1880

PRÉFACE.

La Géométrie descriptive a pour objet de représenter ou *dessiner* sur un plan, surface à deux dimensions, tout corps existant ou à construire dans l'espace qui en a trois, de manière que ce *dessin* donne tous les éléments nécessaires à la détermination de la forme et des dimensions du corps, ainsi que de la position qu'il occupe ou qu'il doit occuper dans l'espace.

Un tel dessin donne les moyens de reconstruire le corps tel qu'il était, et là où il était, s'il venait à disparaître ; il permet également de construire un corps existant seulement à l'état de projet, et dont on connaît la forme et les dimensions ainsi que la position qu'il doit occuper.

Ces dessins exécutés d'après des conventions propres à la Géométrie descriptive portent le nom de *projections*.

On dit qu'une figure est la projection d'une autre, lorsqu'il existe une certaine loi qui lie les éléments de l'une de ces figures aux éléments correspondants de l'autre. L'énoncé de cette loi caractérise la *méthode de projection*.

Si les projections d'un corps sont construites avec exactitude et précision, elles permettent de retrouver les vraies dimensions de ce corps.

D'un autre côté, la Géométrie descriptive donne des règles et conventions d'après desquelles on parvient, à l'aide de constructions graphiques très-rigoureuses, à donner à ces projections le relief et l'aspect sous lesquels les corps se présentent à notre vue.

Ces propriétés font de la Géométrie descriptive la base scientifique des arts graphiques.

Un autre but de la Géométrie descriptive est de rendre possible l'application des solutions graphiques aux questions de l'étendue.

La Géométrie pure comprend la Géométrie plane ou planimétrie, et la Géométrie de l'espace ou stéréométrie.

Tous les problèmes d'application peuvent être résolus par le calcul ou à l'aide de constructions graphiques; la nature de la question et celle du résultat donnent des raisons pour le choix de l'une ou de l'autre des deux méthodes de solution.

Pour les figures du ressort de la planimétrie, les solutions par la méthode graphique peuvent être exécutées à l'aide de constructions graphiques, qui sont la traduction en lignes des opérations énoncées en mots dans le raisonnement du problème.

Cette méthode directe de solution par le dessin ne s'applique plus aux questions du ressort de la stéréométrie. Les opérations graphiques à exécuter dans l'espace deviennent si non impossibles, du moins très laborieuses et fort peu précises :

La Géométrie descriptive apprenant à représenter, sans laisser de l'indétermination, sur un plan de figure qui n'a que deux dimensions, tout corps de l'espace qui en a trois, remplace les opérations graphiques à exécuter dans l'espace par des constructions graphiques planes exécutables, dans ce plan, sur les corps ainsi représentés.

Les méthodes de projection qui conduisent au double but de la Géométrie descriptive sont au nombre de cinq :

I. *Les projections orthogonales ou orthographiques cotées sur un plan de figure.*

II. *Les projections doubles orthogonales sur deux plans rectangulaires.*

III. *Les projections axonométriques.*

IV. *Les projections obliques.* (Clinographiques, clinogonales, plagiographiques.)

V. *Les projections centrales ou polaires.*

Nous exposerons, dans cette première partie, la méthode des projections cotées et celle des projections orthogonales sur deux plans rectangulaires, et nous appliquons ces méthodes de projection à un grand nombre de problèmes et de cas particuliers relatifs au point, à la droite et au plan. Le lecteur aura aussi les moyens de réussir dans l'étude de la Géométrie descriptive, car, comme le disait l'illustre Monge, celui qui manie sans hésitation la ligne droite et le plan, ne connaît plus d'obstacle dans cette science.

Désireux de faciliter l'étude de cette branche des mathématiques et d'éveiller ou de développer la faculté de voir dans l'espace, si indispensable à cette étude et si inégalement départie à ceux qui l'abordent, nous avons adopté une méthode d'enseignement qui découle du but même de la Géométrie descriptive.

Tout problème de géométrie comporte naturellement, dans sa solution, deux parties différentes.

La première partie expose, dans leur ordre logique et raisonné, les différentes opérations à exécuter dans l'espace sur les données du problème pour arriver au résultat, et constitue *l'analyse du problème,* sa *solution dans l'espace.*

Dans la seconde partie, on traduit en lignes, par des tracés graphiques exécutés d'après certains principes et des notations conventionnelles, les opérations énoncées en mots dans la solution dans l'espace. C'est la *solution graphique ou descriptive.*

C'est principalement dans la première de ces deux solutions, dans l'analyse du problème, que la faculté de voir dans l'espace rend des services réels, et c'est pour aider au développement de cette faculté que presque toutes les solutions un peu importantes ont été représentées par la méthode des projections obliques.

Ces représentations font image, facilitent l'étude et forment une transition entre le raisonnement géométrique abstrait et l'exécution graphique.

Louvain, le 9 Août 1880.

BIBLIOGRAPHIE. — Ouvrages et mémoires consultés.

1. **Monge.** Géométrie descriptive. 1794.
2. **Vallée.** Traité de Géométrie descriptive. 1820.
3. **Farish.** Isométrical perspective. Cambridge 1820.
4. **Vallée.** Traité de la science du dessin. Paris 1821.
5. **Cousinery.** Géométrie perspective. Paris 1828.
6. **Sopwith.** A treatise on isométrical drawing. London 1834.
7. **Mollinger.** Isometrische Projectionslehre. Solothurn 1840.
8. **Brasseur.** Applications des projections cotées à diverses recherches sur l'étendue, Liége 1841.
9. **Th. Olivier.** Cours de Géométrie descriptive. Paris 1843.
10. **Leroy.** Traité de Géométrie descriptive. Liége 1851.
11. **Meyer.** Lehrbuch der Axonométrie. Leipzig 1852.
12. **Brasseur.** Mémoire sur une nouvelle méthode d'application de la Géométrie descriptive à la recherche de l'étendue. (Académie Royale des Sciences de Belgique.) 1853.
13. **J. Weisbach.** Anleitung zum axonométrischen Zeichnen. Freiberg 1857.
14. **Robert Schmit.** Théoretisch-prachtischer Lehrgang der Axonométrie. Leipzig 1859.
15. **J. de la Gournerie.** Traité de Perspective linéaire. Parit 1859.
16. **J. de la Gournerie.** Traité de Géométrie descriptive. Paris 1862-1864.
17. **Tresca.** Traité élémentaire de Géométrie descriptive. Paris 1864.
18. **Poncelet.** Traité des propriétés projectives des figures. (Edition nouvelle et Supplément.) 1865.
19. **Pohlke.** Darstellende Géométrie. Berlin 1866.
20. **Reye.** Géométrie der Lage. Hannover 1866-1868.
21. **Gugler.** Lehrbuch der descriptiven Géométrie. Stuttgart 1867.
22. **Brasseur.** Programme d'un Cours de Géométrie descriptive. Liége 1867.

23. **Catalan.** Traité élémentaire de Géométrie descriptive. Paris 1868.
24. **J. Schlesinger.** Darstellende Géométrie. Wien 1870.
25. **Lefébure de Fourcy.** Traité de Géométrie descriptive. Paris 1870.
26. **J. Adhémar.** Traité de Perspective linéaire. Paris 1870.
27. **W. Fiedler** Darstellende Géométrie. Leipzig 1871.
28. **Ménétrier.** Eléments de Géométrie descriptive. Mons 1873.
29. **J. P. Schmit.** Cours de Géométrie descriptive. Liége 1868—1874.
30. **Rouché et de Comberousse.** Traité de Géométrie élémentaire. Paris 1874.
31. **Dr. Rudolf Sturm.** Elemente der darstellenden Géométrie. Leipzig 1874.
32. **Luigi Crémona.** Eléments de Géométrie projective (traduit par Ed. Dewulf.) Paris 1875.
33. **J. F. De Moor.** Leçons de Géométrie descriptive. Bruxelles 1876.
34. **F. I. C.** Eléments de Géométrie descriptive. Tours 1876.
35. **Chr. Scherling.** Grundzüge der axonométrischen und schiefen Parallelprojection. Leipzig 1876.
36. **Karl Kiekler.** Die Méthoden der Darstellenden Géométrie. Leipzig 1877.
37. **G. Delabar.** Anleitung züm Linearzeichnen. Fribourg (Bade) 1879.
idem. Polar und Parallelperspective.
38. **Mannheim.** Cours de Géométrie descriptive de l'Ecole polytechnique. Paris 1880.

I. { Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége ;
Bulletins de l'Académie royale de Belgique ;
II. Journal de l'Ecole polytechnique ;
III. Comptes-rendus de l'Institut ;
IV. Zeitschrift für Mathématik und Physik ;
V. Grunert's Archiv für Mathématik und Physik ;
VI. Vierteljahreschrift der naturforschenden Geseltschaft zu Zürich ;
VII. Der Civilingénieur ;
VIII. Nouvelles Annales de Mathématiques.

ERRATA.

Page 41, ligne 16 : *au lieu de* (Epure 32-2), *lisez* (Epure 32-1).
» 46, ligne 18 : *au lieu de* sommet de projection, *lisez* sommet de symétrie.
» 113, ligne 16 : *au lieu de* sur $v(b)$, *lisez* sur $v'(b)$.
» 126, ligne 6 en remontant : *au lieu de* et suivant la, *lisez* le long de.
» 128, ligne 20 : *au lieu de* (Ep. 173) *lisez* (Ep. 178).
» 145, ligne 2 : *au lieu de* d'_1, *lisez* d''_1.
» 148, ligne 6 en remontant : *au lieu de* c_2, *lisez* e_2.
» 148, ligne 8 en remontant : *au lieu de* d_2c_2, *lisez* d_2e_2.
» 150, ligne 12 en remontant : *au lieu de* α_1, *lisez* α.
» 152, lignes 8 et 23 : *au lieu de* SD, *lisez* SC.
» 158, ligne 4 en remontant : *au lieu de* s', *lisez* $s'b'$.
» 159, ligne 12 : *au lieu de* S, *lisez* *s*.
» 159, ligne 8 en remontant : *au lieu de* *sc*, *sb* et *sa*, *lisez* *sa*, *sb* et *sc*.
» 159, ligne 6 en remontant : *au lieu de* *sc* et *sb*, *lisez* *se* et *sf*.
» 159, ligne 1 en remontant : *au lieu de* s'_1 $b''v$, *lisez* s''_1 $b''x$.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

LIVRE PREMIER

PROJECTIONS ORTHOGONALES
SUR
DEUX PLANS RECTANGULAIRES.

Chapitre premier.

Représentation du point, de la ligne droite et du plan.

1. Considérations générales. — Définitions. — Projections du point. (**Fig. 1.**) Si, d'un point a de l'espace, on abaisse une perpendiculaire sur un plan P_1, *le pied a' de cette perpendiculaire est la projection de a sur* P_1.

Si, du même point a, on abaisse une perpendiculaire sur un second plan P_2, normal au premier, *le pied a'' de cette perpendiculaire est la projection de a sur* P_2.

Plans de projection. *Les deux plans* P_1 *et* P_2 *sont les deux plans de projection.*

Projetantes. *Les perpendiculaires aa' et aa'' sont les deux projetantes du point a.*

Axe de projection. *La droite d'intersection des deux plans de projection est l'axe de projection,* ou simplement *l'axe.*

Premier plan de projection. *Le plan* P_1 *est le prcmier plan de projection.*

Second plan de projection. *Le plan* P_2 *est le second plan de projection.*

Première projection du point. *La projection a' de a sur* P_1 *est la première projection du point a.*

Seconde projection du point. *La projection a'' de a sur* P_2 *est la seconde projection du point a.*

Distances ou hauteurs du point *a. Les longueurs des projetantes aa' et aa'' sont les distances du point a respectivement au premier et au second plans de projection.* Ce sont *les hauteurs* de ce point.

Première hauteur. *La longueur aa' est la première distance, la première hauteur du point a.*

Seconde hauteur. *La longueur aa'' sera la seconde distance, la seconde hauteur du point a.*

Si nous considérons la figure $aa'a_0a''$ qui est un rectangle, et dans laquelle $a'a^0$ et $a''a_0$ sont des perpendiculaires abaissées de a' et de a'' sur l'axe, perpendiculaires qui sont encore le résultat de l'intersection des deux plans de projection avec le plan $a''aa'$ normal à l'axe, nous voyons que la perpendiculaire $a'a_0$ est l'ordonnée de a', dans le plan P_1, par rapport à un point A de l'axe, pris pour origine ou centre des coordonnées.

De même, la perpendiculaire $a''a_0$ sera l'ordonnée de a, dans le plan P_2, par rapport à ce même point A.

Première ordonnée. Nous nommerons *première ordonnée du point a, l'ordonnée de sa première projection, la distance de cette première projection à l'axe.*

Seconde ordonnée. *La seconde ordonnée du point a sera la distance de la seconde projection a'' à l'axe.*

2. Plans de projection particuliers. Dans les applications de la Géométrie Descriptive, (Stéréotomie, Dessin industriel, etc.) P_1 est un plan horizontal et P_2 par conséquent un plan vertical.

Plan de projection horizontal. Le premier plan de projection P_1 devient alors *le plan de projection horizontal.*

Plan de projection vertical. Le plan de projection P_2 portera le nom de *plan de projection vertical.*

Ligne de terre. L'axe devient *la ligne de terre.*

Projection horizontale et projection verticale du point.

La première projection du point deviendra sa *projection horizontale*, et la seconde projection du même point en sera *la projection verticale.*

On dit, par abréviation, *projection horizontale, projection verticale*, au lieu de *projection sur le plan horizontal, projection sur le plan vertical.*

Distances et ordonnées horizontales et verticales.

La longueur aa', la première hauteur, la première distance du point, sera sa *distance horizontale; aa''* deviendra la *distance verticale* du point.

On dit, *distance horizontale, distance verticale*, pour ne pas devoir dire, *distance au plan horizontal, distance au plan vertical.*

De même, la première ordonnée $a'a_0$ sera l'*ordonnée horizontale*, et la seconde ordonnée $a''a_0$ l'*ordonnée verticale* du point a.

3. Remarques. 1. Par ce qui précède, nous voyons que, pour passer du cas général au cas particulier des plans de projection horizontal et vertical, toutes les définitions et dénominations restent les mêmes; il suffira de remplacer les mots de *première* et *seconde* respectivement par *horizontale* et *verticale.*

2. Dans une traité de géométrie descriptive pure, science indépendante de toute application, il convient, comme en géométrie analytique, de généraliser les définitions, et de considérer les projections comme effectuées sur deux plans rectangulaires quelconques P_1 et P_2.

Ces dénominations présentent des avantages réels dans le chapitre qui traite des changements de plans de projection.

4. Loi des projections orthogonales sur deux plans rectangulaires.

Tout point de l'espace est lié à chacune de ses projections sur les deux plans P_1 *et* P_2 *par une perpendiculaire à ces plans.*

—

Représentation et détermination du point.

—

5. Convention pour représenter un point sur deux plans rectangulaires.

Si, d'un point a de l'espace, on abaisse une perpendiculaire sur P_1 et une autre sur P_2, les projetantes aa' et aa'' déterminent un plan perpendiculaire à l'axe. Soit a_0 le point de rencontre de l'axe avec ce plan. La figure $aa''a_0a'$ est un rectangle et donne $aa'=a''a_0$ et $aa''=a'a_0$. (**Fig. 1.**)

De ces égalités, on déduit les propriétés suivantes :

Propriété I. Un point a de l'espace ainsi que ses deux projections a' et a'' sur deux plans rectangulaires P_1 et P_2, se trouvent toujours dans un plan perpendiculaire à l'axe de projection.

Propriété II. La première hauteur du point est égale à la seconde ordonnée.

La seconde hauteur est égale à la première ordonnée.

6. Principe. *Un point de l'espace est suffisamment représenté et déterminé par ses projections orthogonales* a' *et* a'' *sur deux plans rectangulaires* P_1 *et* P_2.

Il suffira, en effet, pour retrouver le point a, d'élever en a' une perpendiculaire à P_1, et en a'' une autre perpendiculaire à P_2; ces deux perpendiculaires se coupent au point demandé a.

Ou bien, à P_1 et par a', on mène une perpendiculaire ; sur cette ligne, et à partir de a', on porte une longueur égale à la seconde ordonnée $a''a_0$; l'extrémité de cette perpendiculaire sera le point a. (**6**)

De même, par a'', on mène une perpendiculaire à P_2; sur cette ligne, à partir de a'', on porte une longueur égale à la première ordonnée pour avoir, à son extrémité, le point a.

7. Convention pour représenter la position d'un point sur un seul plan de figure.

Pour représenter le point *a* de l'espace sur un seul plan de figure, à l'aide de ses projections a' et a'' sur P_1 et P_2 (but de la géométrie descriptive), on fait tourner l'un des plans autour de l'axe de projection, jusqu'à ce qu'il coïncide avec le prolongement de l'autre; les deux plans de projections forment ainsi un seul plan, **le plan de figure**. Dans ce mouvement de rotation du plan P_1, par exemple, la projection a' restera toujours sur a_0a'; si P_1 coïncide avec le prolongement de P_2, a'' et a' se trouveront sur une même perpendiculaire à l'axe. (**Fig. 2.**)

De même, si l'on fait tourner P_2 autour de l'axe, jusqu'à ce que ce plan coïncide avec P_1 prolongé, a'' et a' se trouveront sur une perpendiculaire à l'axe. De ce qui précède, nous pouvons conclure :

Propriété. *Tout point a de l'espace, dont les projections sur* P_1 *et* P_2 *sont figurées sur un seul plan, le plan de figure, a ces projections toujours unies par une perpendiculaire à l'axe.* (**Epure 5.**)

8. Remarques I. La figure 1 montre que cette propriété est indépendante de l'angle dièdre des deux plans de projection.

II. Dans cette représentation des corps et des figures sur un seul plan de figure, on devra constamment se rappeler, que le plan de figure représente l'un des plans de projection dans sa véritable position, et que l'autre est rabattu sur le premier autour de leur intersection commune. Cette intersection, l'axe de projection, sera toujours figurée d'une manière visible par un trait plein et fin. L'axe divise le plan de figure en *deux nappes* dont l'une est le plan P_1, et l'autre le plan P_2.

III. Dans toutes les représentations des figures que nécessite l'exposé du cours à l'amphithéâtre, le plan du tableau sera le plan P_2; il est toujours dans sa vraie position, et le plan P_1 est supposé rabattu sur P_2 autour de l'axe.

Dans le tracé des épures sur une feuille de papier, c'est le plan P_1 que l'on suppose être fixe et coïncider avec le plan du papier; ce sera P_2 qui aura tourné autour de l'axe, jusqu'à ce qu'il soit venu dans le prolongement de P_1.

9. Principe. *Un point de l'espace est suffisamment représenté et déterminé sur un seul plan de figure par ses deux projections orthogonales sur* P_1 *et* P_2, *unies par une perpendiculaire à l'axe.*

En effet, pour retrouver le point, il suffit de ramener dans sa position primitive celui des deux plans qui aura tourné autour de l'axe, et d'élever à ce plan, et par la projection qu'il contient, une perpendiculaire égale à la distance de l'autre projection à l'axe. (**6.** Propriété II.) (**Fig. 2.**)

Ou bien, sans relever celui des plans de projection qui a changé de position, on n'a qu'à élever au plan qui est resté fixe, et par la projection du point sur ce plan, une perpendiculaire égale à la distance de l'autre projection à l'axe. Dans ces deux cas, l'extrémité de la perpendiculaire sera le point de l'espace que l'on veut retrouver.

10. Notations. — Conventions. Un point, désigné dans l'espace et dans l'énoncé d'un problème par une lettre a, aura, dans une épure, ses deux projections désignées par a' et a''.

a' marque *la projection de a sur* P_1, *la première projection du point a, la projection horizontale de ce point*, dans le cas où P_1 est un plan horizontal.

a'' désigne *la projection de a sur* P_2, *la seconde projection du point a, la projection verticale de ce point*, si P_2 est un plan vertical.

Pour simplifier un texte, on dit : a', ou mieux encore *la projection* a', au lieu de. *la première projection de a, la projection de a sur* P_1, etc.

De même, on dit : a'', ou encore, *la projection* a'', au lieu de, *la seconde projection de a. la projection verticale de a*, etc.

Représentation et détermination de la droite.

---

11. Projection d'une droite. Si, d'un point d'une droite d, on abaisse une perpendiculaire sur un plan P, cette perpendiculaire, avec d, déterminent un plan normal à P.

Ce plan coupe P suivant une droite, *la projection de d sur* P.

Une perpendiculaire à P, menée par un point quelconque m de d, est entièrement située dans le plan normal à P mené par d, et a son pied, la projection de m sur P, sur la trace du plan normal, trace qui est la projection de la droite. Il suit de là que :

La projection d'une droite sur un plan est une droite, et que cette projection contient les projections de tous les points de la droite.

Remarque. Si d est perpendiculaire à P, la projection de d sur P se réduit à un point, pied de la perpendiculaire d.

12. Définitions. Le plan mené par la droite d normalement à P_1 coupe ce plan suivant une droite d', la projection de d sur P_1. (**Fig. 3**.)

Le plan mené par la droite d normalement à P_2, coupe ce dernier plan suivant une droite d'', la projection de d sur P_2.

Première projection de la droite. *La projection d' de d sur P_1 est la première projection de la droite.*

Seconde projection de la droite. *La projection d'' de d sur P_2 est la seconde projection de la droite.*

Premier plan projetant. Le plan mené par d normalement à P_1 *est le premier plan projetant de la droite.*

Second plan projetant. Le plan mené par d normalement à P_2 *est le second plan projetant de la droite.*

Chacune des projections de la droite contient les projections de même nom de tous les points de cette droite.

En rabattant l'un des deux plans de projection sur l'autre, supposé fixe, les deux projections de la droite se trouveront dans un seul plan de figure, et chaque point de la droite aura ses projections sur les projections de même nom de la droite, unies par une perpendiculaire à l'axe de projection. Ces opérations conduisent à l'**Epure 6**.

13. Principe. *La droite d de l'espace est donc réprésentée sur un seul plan de figure par les deux projections orthogonales sur P_1 et P_2, et réciproquement, une droite ainsi représentée est suffisamment détermité.*

En effet, la droite, dont d' est la projection sur P_1, se trouve dans un plan normal à P_1 passant par d'.

Cette même droite, ayant d'' pour projection sur P_2, se trouvera dans un plan normal à P_2 mené suivant d''.

Devant se trouver dans deux plans différents, elle sera déterminée par leur intersection commune.

On voit, d'après ce qui précède, que pour retrouver la droite représentée sur un plan de figure par ses projections orthogonales d' et d'' sur deux plans rectangulaires P_1 et P_2, il suffit de redresser celui des plans qui n'est pas dans véritable position, et de mener, par chaque projection de la droite, un plan normal au plan de projection de même nom que cette projection.

La droite d'intersection de ces plans sera la droite de l'espace.

On peut encore retrouver la droite en reconstruisant deux de ses points (**7**).

14. Notations. Conventions. Une droite de l'espace désignée par

$$d, e, f, \text{ etc. aura sa projection sur } \left\{\begin{matrix} P_1 \text{ désignée par } d', e', f', \text{ etc.} \\ P_2 \text{ désignée par } d'', e'', f'', \text{ etc.} \end{matrix}\right.$$

Au lieu de désigner la droite et ses projections par une seule lettre, on peut la distinguer en marquant deux de ses points (**3**).

$$\text{Si}\left\{\begin{matrix}P_1\\P_2\end{matrix}\right\}\text{est un plan}\left\{\begin{matrix}\text{horizontal } d', e', f', \text{ etc.}\\ \text{vertical } d'', e'', f'', \text{ etc.}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\text{marquent}\\\text{les}\\\text{projections}\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\text{horizontales}\\\text{verticales}\end{matrix}\right\}\text{des droites } d, e, f, \text{ etc.}$$

—

Représentation et détermination du plan.

—

15. Définitions. La droite suivant laquelle un plan de l'espace coupe le plan P_1, est la trace de ce plan sur P_1 ou sa *première trace.*

On appelle *seconde trace du plan*, trace sur P_2, la droite suivant laquelle ce plan coupe P_2. (**Fig. 4**.)

Ces deux droites sont *les deux traces du plan.*

16. Propriétés. I. Comme tout plan est parallèle à l'axe de projection on coupe cet axe en un point, les deux traces d'un plan sont parallèles ou se coupent sur l'axe.

II. La première trace, située dans P_1, a sa seconde projection sur l'axe de projection ; de même, la seconde trace du plan, qui est dans P_2, a sa première projection sur l'axe.

III. En rabattant P_1 sur P_2 avec la première trace R_1 du plan R, on aura l'**épure 7** qui représente le plan R sur le plan de figure.

17. Principe. *Les deux traces d'un plan étant deux droites de ce plan, celui-ci est représenté et déterminé par ses traces, et réciproquement, les deux traces d'un plan suffisent pour le représenter et pour le déterminer.*

En effet, pour retrouver, dans l'espace, le plan représenté sur un plan de figure par ses deux traces sur P_1 et P_2, il suffit de redresser celui des deux plans de projection qui n'est pas dans sa véritable position, avec la trace du plan qu'il contient.

Cette trace q_1 ainsi redressée détermine avec l'autre trace q_2, restée fixe, le plan q de l'espace qui les contient. (**Fig. 4.**)

18. Notations. — Conventions. Un plan de l'espace, désigné dans le texte d'un problème par une des lettres p, q, z, etc. aura sa trace sur P_1 désignée par p_1, q_1, z_1, etc. et sa trace sur P_2, par p_2, q_2, z_2, etc.

Dans un texte, on dira : la trace p un, la trace p deux du plan p.

$$\left.\begin{matrix} p_1 \\ r_1 \\ s_1 \end{matrix}\right\} \text{ marquent } \left\{\begin{matrix} \text{la première trace. . .} \\ \text{la trace sur } P_1 \text{ . . .} \\ \text{la trace horizontale . .} \\ \text{(si } P_1 \text{ est horizontal)} \end{matrix}\right\} \text{ du plan } \left\{\begin{matrix} p; \\ r; \\ s. \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} p_2 \\ r_2 \\ s_2 \end{matrix}\right\} \text{ désignent } \left\{\begin{matrix} \text{la seconde trace . .} \\ \text{la trace sur } P_2 \text{ . . .} \\ \text{la trace verticale . .} \\ \text{(si } P_2 \text{ est vertical)} \end{matrix}\right\} \text{ du plan } \left\{\begin{matrix} p; \\ r; \\ s. \end{matrix}\right.$$

On n'emploie pas les notations p', r', s', etc. ainsi que p'', q'', r'', etc. pour ne pas les confondre avec les notations données aux projections des droites p, r et s.

19. Les **épures 5**, **7** et **8** représentent le point a, la droite d et le plan R.

Chapitre II.

—

Des différentes positions du point, de la ligne droite et du plan par rapport aux plans de projections.

Des différentes positions du point.

—

20. Considérations générales. — Définitions. — Conventions. Les deux plans de projection prolongés au delà de l'axe forment quatre angles dièdres qui comprennent tout l'espace. (**Fig. 8.**)

Plans de projection. — Nappes positives et nappes négatives.

Appelons *nappes* les deux parties des plans P_1 et P_2 dans lesquelles ils sont divisés par l'axe, et, pour les distinguer, appelons *nappes positives* les plans P_1 et P_2, et *nappes négatives* les prolongements $-P_1$ et $-P_2$.

Dièdres formés par P_1 et P_2.

Appelons
- *premier angle dièdre* celui formé par $+P_1$ et $+P_2$;
- *deuxième angle dièdre* » » » $-P_1$ et $+P_2$;
- *troisième angle dièdre* » » » $-P_1$ et $-P_2$;
- *quatrième angle dièdre* » » » $+P_1$ et $-P_2$.

Hauteurs et ordonnées positives et négatives.

La première ordonnée d'un point est *positive* ou *négative*, suivant qu'elle est dans $+P_1$ ou dans $-P_1$.

La seconde ordonnée d'un point est *positive* ou *négative,* suivant qu'elle est dans $+P_2$ ou dans $-P_2$.

La première hauteur d'un point est *positive* ou *négative,* suivant que ce point est *au-dessus* ou *au-dessous* des deux nappes de P_1.

La seconde hauteur d'un point est *positive* ou *négative,* suivant que ce point est *en avant* ou *en arrière* des deux nappes de P_2.

Remarque. En exécutant le mouvement de rotation de P_1 autour de l'axe, $+P_1$ viendra coïncider avec $-P_2$, et $-P_1$ avec $+P_2$.

Les premières ordonnées positives se trouveront au-dessous de l'axe, et les premières ordonnées négatives au-dessus de la même ligne.

Les secondes ordonnées positives seront situées au-dessus de l'axe de projection, et les secondes ordonnées négatives au-dessous de cet axe,

21. Différentes positions du point par rapport aux plans de projection.

Menons un plan perpendiculaire à l'axe par un point quelconque de cette ligne, et de ce point comme centre et dans ce plan, décrivons une circonférence de cercle, sur laquelle nous supposons, pour fixer les idées, que le point de l'espace se déplace. (**Fig. 8.**)

Il occupera successivement les positions suivantes :

1° il sera dans la nappe $+P_1$ en *a ;*	5° dans la nappe $-P_1$,. . . en *e;*
2° dans le 1er dièdre, . . . en *b;*	6° dans le 3^{e} dièdre,. . . . en *f;*
3° dans la nappe $+P_2$, . . en *c;*	7° dans la nappe $-P_2$, . . en *g;*
4° dans le 2^{e} dièdre, . . . en *d;*	8° dans le 4^{e} dièdre, . . . en *h;*

9° enfin il peut être sur l'axe, en *i*.

22. Représentation et détermination des neuf positions différentes du point.

Observons que la première hauteur d'un point a même signe et même valeur que la seconde ordonnée de ce point, et que la seconde hauteur a même valeur et même signe que la première ordonnée. (**Fig. 1.**)

Cela posé, le tableau suivant donnera les signes des ordonnées ainsi que leurs positions, pour toutes les positions possibles du point à l'égard des plans de projection.

POSITIONS DU POINT.		SIGNES		Positions après rabattement de P_1 sur P_2.	
		1re ordonnée ou 2e hauteur.	2e ordonnée ou 1re hauteur.	1re projection et 1re ordonnée.	2e projection. et 2e ordonnée.
I.	POINT SITUÉ EN *a* dans le plan $+ P_1$.	positives	nulles	au-dessous de l'axe	sur l'axe
II.	*b* dans le 1er dièdre.	positives	positives	au-dessous de l'axe	au-dessus de l'axe
III.	*c* dans $+ P_2$.	nulles	positives	sur l'axe	au-dessus de l'axe
IV.	*d* dans le 2e dièdre.	négatives	positives	au dessus de l'axe	au-dessus de l'axe
V.	*e* dans $- P_1$.	négatives	nulles	au-dessus "	sur l'axe
VI.	*f* dans le 3e dièdre.	négatives	négatives	au-dessus "	au-dessous de l'axe
VII.	*g* dans $- P_2$.	nulles	négatives	sur l'axe	au-dessous de l'axe
VIII.	*h* dans le 4e dièdre.	positives	négatives	au-dessous de l'axe	au-dessous de l'axe
IX.	*i* sur l'axe.	nulles	nulles	sur l'axe	sur l'axe

23. Réciproque. Il est aisé de prouver (**7**) que les réciproques des propriétés consignées dans ce tableau sont vraies.

Ainsi on prouvera, que le point de la ligne 3, représenté par sa première projection sur l'axe et sa seconde projection au-dessus de l'axe, est un point du plan $+ P_2$.

Exercices. Retrouver les points dont les projections sont indiquées dans le tableau.

24. En comparant entre elles les propriétés des projections du point dans ses différentes positions, nous pouvons poser les lois suivantes :

I. *Suivant qu'un point est situé dans l'un des deux plans de projection, il est lui-même sa projection sur ce plan, et sa projection sur l'autre plan sera sur l'axe.*	**Réciproquement.** *Suivant que l'une des deux projections d'un point est sur l'axe, ce point appartient au plan de projection de nom contraire à celui de cette projection.*
II. *Suivant qu'un point est situé au-dessus ou au-dessous d'une des nappes du premier plan de projection* P_1, *sa seconde projection sera située au-dessus ou au-dessous de l'axe.*	**Réciproquement.** *Suivant que la seconde projection d'un point se trouve au-dessus ou au-dessous de l'axe, ce point est, dans l'espace, au-dessus ou au-dessous de l'une des deux nappes de* P_1.
III. *Suivant qu'un point est situé en deçà ou au delà d'une des nappes du second plan de projection* P_2, *sa première projection est au-dessous ou au-dessus de l'axe.*	**Réciproquement.** *Suivant que la première projection d'un point se trouve au-dessous ou au-dessus de l'axe, ce point est, dans l'espace, en deçà ou au delà de l'une des deux nappes de* P_2.

Remarque. Voir (**Planche I, Epure 9**), la représentation du point dans toutes les positions par rapport à P_1 et P_2, positions figurées dans la **fig. 8** et marquées dans le tableau du § **22.**

Des différentes positions de la droite à l'égard des deux plans de projection.

25. Différentes positions. Une droite de l'espace peut occuper une des dix positions suivantes :

Elle sera	parallèle	à P_1	(1.
		à P_2	(2.
		à l'axe	(3.
	perpendiculaire	à P_1	(4.
		à P_2	(5.
		à l'axe	(6.
	située	dans P_1	(7.
		dans P_2	(8.
		sur l'axe	(9.
	oblique	à P_1 et à P_2	(10.

26. Droite parallèle à P_1. *Toute droite parallèle à* P_1 *a pour seconde projection une droite parallèle à l'axe.*

En effet, la droite d et les projetantes de ses points sur P_2 déterminent le second plan projetant de d, plan qui est parallèle à P_1 puisque les droites qui le déterminent sont parallèles à ce plan. Le second plan projetant de la droite d ainsi que P_1 sont donc coupés par P_2 suivant deux droites, d'' et l'axe, qui sont parallèles. (**Fig. 10. — Epure 14—1.**)

Réciproquement. *Si la seconde projection d'une droite est parallèle à l'axe, cette droite est parallèle à* P_1.

En effet, le plan perpendiculaire à P_2 mené par d'' étant parallèle à P_1, il rencontrera le plan normal à P_1 mené par d' suivant la droite n (**13**), nécessairement parallèle à P_1.

27. Droite parallèle à P_2. *Toute droite parallèle à* P_2 *a pour première projection une droite parallèle à l'axe, et réciproquement.* (**Epure 14-2.**)

Mêmes démonstrations qu'au § 26.

28. Droite parallèle à l'axe. *Une droite parallèle à l'axe a ses deux projections parallèles à l'axe, et réciproquement.* (**Ep. 14-3.**)

Une telle droite est, en effet, parallèle à P_1 et à P_2.

29. Droite perpendiculaire à P_1. *Toute droite perpendiculaire à* P_1 *a pour seconde projection une droite perpendiculaire à l'axe, et pour première projection un point.* (**Fig. 11. Epure 14-4.**)

En effet, le premier plan projetant d'une telle droite d sera la droite elle-même; il donnera pour projection de d sur P_1 un point, la *trace-projection* de d sur P_1.

Le second plan projetant de d étant mené par la droite d normale à P_1, sera à son tour normal à P_1 et, comme tel, il ne peut couper P_2 que suivant une droite d'' normale à P_1, donc normale à toute droite passant par son pied dans ce plan, donc à l'axe.

Réciproquement. *Si la première projection d'une droite se réduit à un point, et si la seconde projection de cette droite est une droite normale à l'axe, la droite de l'espace ainsi représentée est perpendiculaire à* P_1. (A démontrer.)

30. Droite perpendiculaire à P_2. *Toute droite perpendiculaire à* P_2 *a pour seconde projection un point, et pour première projection une droite perpendiculaire à l'axe, et réciproquement.* (**Ep. 14-5.**)

Mêmes démonstrations qu'au § 29.

31. Droite perpendiculaire à l'axe. *Une droite perpendiculaire à l'axe se projette sur chacun des deux plans de projection suivant une droite perpendiculaire à cet axe.* (**Fig. 12. Epure 14-6.**)

Le théorème des trois perpendiculaires du cinquième livre de la géométrie élémentaire, nous apprend que si une droite d est perpendiculaire à une droite a située dans un plan, la projection de d sur ce plan est normale à la droite a. Donc d' et d'' sont perpendiculaires à l'axe, droite située dans P_1 et P_2.

La réciproque de cette propriété n'est pas toujours vraie. *Une droite ayant chacune de ses projections normale à l'axe peut être normale à cette ligne; elle sera toujours située dans un plan perpendiculaire à l'axe.*

Une telle droite, pour être suffisamment représentée, exige les projections de deux de ses points.

32. Droite située dans P_1. *Une droite située dans* P_1 *est elle-même sa première projection; sa seconde projection sera sur l'axe.* (**Epure 14-7.**)

Le premier plan de projection P_1 deviendra, en effet, le second plan projetant de cette droite.

Réciproquement. *Toute droite dont la seconde projection coïncide avec l'axe, est une droite de* P_1.

33. Droite située dans P_2. *Une droite située dans* P_2 *est elle-même sa seconde projection; sa première projection sera sur l'axe, et réciproquement.* (**Epure 14-8.**)

34. Droite sur l'axe. *Une telle droite a ses deux projections qui coïncident avec l'axe, et réciproquement.* (**Epure 14-9.**)

35. Droite quelconque, oblique à l'axe et aux deux plans P_1 **et** P_2.

Toute droite qui ne se trouve pas dans une des neuf positions précédentes, aura pour projections sur P_1 et P_2 des droites obliques à l'axe. Réciproquement, une droite d qui a ses deux projections d' et d'' obliques à l'axe, est une droite de l'espace inclinée sur l'axe et sur les deux plaus P_1 et P_2.

36. Traces d'une droite. Les points d'intersection de la droite avec les deux plans de projection s'appellent les *traces* de la droite ; ce sont les *traces laissées* sur ces plans par la droite qui les perce en ces points.

Première trace. La trace sur P_1 est *la première trace de la droite.*

Seconde trace. La trace sur P_2 est *la seconde trace de la droite.*

37. Construire les deux traces d'une droite. La première trace étant le point de rencontre de la droite d avec P_1, se trouvera dans P_1 et sur d, donc en a, dont les deux projections sont a' et a''. (**Epure 13.**)

De même, le point b, dont les deux projections sont b' et b'', appartient à d et se trouve dans P_2 ; ce point est donc la seconde trace de la droite.

De là, il suit, *que pour avoir les traces d'une droite, on n'a qu'à* *prolonger les projections de cette droite jusqu'à l'axe, et élever, en ces points, des perpendiculaires à l'axe; chacune de ces perpendiculaires reliera deux projections d'une trace.*

38. Formulaire pour reconnaître les positions d'une droite dans l'espace à la simple inspection de ses projections dans une épure.

Suivant que	la 1re projection de la droite est	parallèle à l'axe, perpendiculaire à l'axe et l'autre projection un point,	la droite est	parallèle à perpendiculaire à	P_2,	et réciproquement.
	la 2e projection de la droite est	parallèle à l'axe, perpendiculaire à l'axe et l'autre projection un point,	la droite est	parallèle à perpendiculaire à	P_1,	
	la 1re projection la 2e projection	est sur l'axe	la droite sera dans le	second plan de projection, premier plan de projection,		

Si les deux projections se confondent et sont perpendiculaires à l'axe, la droite de l'espace peut être perpendiculaire à l'axe. Elle sera toujours située dans un plan perpendiculaire à l'axe, et il faut, pour la déterminer, donner les projections de deux de ses points.

Des différentes positions du plan à l'égard des plans de projection.

Un plan peut être	parallèle	à P_1	(1
		à P_2	(2
		à l'axe	(3
	perpendiculaire . .	à P_1	(4
		à P_2	(5
		à l'axe	(6
	oblique aux deux plans de projection		(7

39. Plan parallèle à P_1. *Tout plan parallèle à* P_1 *n'a qu'une trace, sa trace sur* P_2, *et celle-ci est parallèle à l'axe.* **(Epure 17-1.)**

Réciproquement. *Tout plan représenté par une seule trace sur* P_2 *parallèle à l'axe, est un plan parallèle à* P_1.

40. Plan parallèle à P_2. *Tout plan parallèle à* P_2 *ne peut avoir qu'une première trace, et celle-ci est parallèle à l'axe.* (**Ep. 17-2.**)

Réciproquement. *Tout plan représenté par une seule trace sur* P_1 *parallèle à l'axe, est un plan parallèle à* P_2.

41. Plan parallèle à l'axe. *Un plan parallèle à l'axe, s'il a deux traces, a ces dernières parallèles à l'axe.* (**Fig. 15. Epure 17-3.**)

Un tel plan T, en effet, rencontrant P_1 et P_2, ne peut couper ces plans que suivant des droites parallèles à l'axe, car autrement T ne serait plus parallèle à cette ligne.

Réciproquement. *Tout plan dont les deux traces sont parallèles à l'axe, est parallèle à cette ligne.* (A démontrer.)

42. Plan perpendiculaire à P_1. *Un plan perpendiculaire à* P_1 *a, en général, deux traces ; sa première trace est quelconque et sa seconde trace est perpendiculaire à l'axe.* (**Fig. 16. Ep. 17-4.**)

En effet, le plan T et le plan P_2, tous les deux perpendiculaires à P_1, se rencontrent suivant T_2, seconde trace de T, perpendiculaire à P_1, donc à toute droite passant par son pied dans P_1, donc à l'axe.

Remarque. La trace T_1 est quelconque ; elle est parallèle ou normale à l'axe, suivant que T est parallèle ou normal à P_2.

Réciproquement. *Tout plan dont la trace sur* P_2 *est perpendiculaire à l'axe, est un plan perpendiculaire à* P_1.

Les deux plans P_1 et P_2 forment un dièdre droit qui a pour arête l'axe de projection. La droite T_2 normale à l'axe étant située dans la face P_2, sera normale à l'autre face P_1. Par suite, le plan T de l'espace se trouvant être mené par une droite normale à P_1, sera normal à ce plan.

La trace T_1 du plan T normal à P_1 porte le nom de **trace-projection** du plan T. *Elle est le lieu géométrique des projections sur* P_1 *de tous les points de* T.

43. Plan perpendiculaire à P_2. *Un plan perpendiculaire à* P_2 *a, en général, deux traces ; sa première trace est perpendiculaire à l'axe et sa seconde trace est quelconque.* (**Epure 17-5.**)

Réciproquement. *Tout plan dont la première trace est perpen-*

diculaire à l'axe, est un plan perpendiculaire à P_2. (Mêmes démonstrations qu'au § 42.)

Remarque. La trace sur P_2 est quelconque ; elle devient parallèle ou perpendiculaire à l'axe, suivant que le plan est parallèle ou normal à P_1.

La trace sur P_2 du plan normal à P_2 sera la **trace-projection** du plan sur P_2. *Elle est le lieu géométrique des projections de tous les points de ce plan sur* P_2.

44. Plan perpendiculaire à l'axe. *Un plan perpendiculaire à l'axe a ses deux traces perpendiculaires à l'axe, et réciproquement.* (**Epure 17-6.**)

Un tel plan est, en effet, perpendiculaire à P_1 et à P_2.

Remarque. Les deux traces se confondent et ne forment qu'une seule perpendiculaire à l'axe.

45. Plan oblique aux deux plans de projection.

Un tel plan ne se trouvant dans aucune des conditions particulières qui caractérisent les positions précédentes, aura ses deux traces obliques à l'axe, et réciproquement.

46. Formulaire pour reconnaître les positions d'un plan dans l'espace à la simple inspection de ses traces dans une épure.

Suivant que	la première trace d'un plan est	parallèle ou perpendiculaire	à l'axe, ce plan est	parallèle à P_2, normal à P_2,	et réciproquement.
	la seconde trace d'un plan est	parallèle ou perpendiculaire	à l'axe, ce plan est	parallèle à P_1, normal à P_1,	
	les deux traces d'un plan sont	parallèles ou perpendiculaires	à l'axe, ce plan est	parallèle à l'axe, normal à l'axe,	

Chapitre III.

—

Des différentes positions que le point, la droite et le plan peuvent avoir entre eux dans l'espace.

Des différentes positions que deux droites peuvent avoir entre elles.

—

47. Différentes positions de la droite.

Deux droites peuvent
- se couper
  - sous un angle quelconque (1.
  - à angle droit . . . . . (2.
- être parallèles . . . . (3.
- se croiser, ne pas être parallèles et ne pas se couper . . . . (4.

48. Droites qui se coupent. *Si deux droites se coupent dans l'espace, le point d'intersection des premières projections de ces droites et le point d'intersection des secondes projections de ces mêmes droites se trouvent sur une même perpendiculaire à l'axe de projection.* (A démontrer.) (**Epure 20-1**.)

Réciproquement. *Si les projections de même nom de deux droites se rencontrent en des points qui se trouvent sur une même perpendiculaire à l'axe, ces deux droites se coupent dans l'espace.* (A démontrer.)

Remarque. La simple inspection des projections des deux droites ne suffit pas pour juger de la valeur de l'angle sous lequel les deux droites se coupent. Cet angle peut être aigu, droit ou obtus.

49. Droites perpendiculaires. — Cas particulier. *Si deux droites sont perpendiculaires et si l'une d'elles est parallèle à l'un des deux plans de projection, les projections des deux droites sur ce plan se rencontrent à angle droit.* (**Fig. 18. Ep. 20-2.**)

Soient la droite ab parallèle à P_1 et la droite cd normale à ab; je dis que $c'd'$, projection de cd sur P_1, est perpendiculaire à $a'b'$, projection de ab sur P_1.

En effet, le premier plan projetant de ab est normal à P_1 et contient, comme tel, la normale cc' abaissée de c sur P_1. La figure $bb'c'c$ est donc un rectangle, dans lequel $b'c'$ est parallèle à bc et cc' normal à bc et à $b'c'$. Or, bc étant perpendiculaire à cd, par hypothèse, et à cc', sera perpendiculaire au plan projetant de cd sur P_1. La droite $c'b'$, parallèle à cb, sera donc également perpendiculaire au plan dcc', donc à toute droite passant par son pied c' dans ce plan, donc à $c'd'$, projection de cd sur P_1. Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Le théorème des trois perpendiculaires du 5e livre de la Géométrie élémentaire fournit une autre démonstration de la propriété précédente.

Réciproquement. *Si deux droites se coupent et si l'une d'elles est parallèle à l'un des plans de projection, et que les projections des deux droites sur ce plan se coupent à angle droit, les deux droites, dans l'espace, sont perpendiculaires entre elles.*

La droite cd de l'espace sera située dans le plan normal à P_1 mené suivant $c'd'$. Or ce plan, déterminé par $c'd'$ et par $c'c$, droites perpendiculaires à $a'b'$, sera perpendiculaire à $a'b'$ et, par suite, à ab qui est parallèle à $a'b'$.

Or ab, perpendiculaire au plan $d'c'c$, sera perpendiculaire à toute droite passant par son pied c dans ce plan, donc aussi à cd. Ce qu'il fallait démontrer.

50. Droites parallèles. *Deux droites parallèles dans l'espace ont leurs projections de même nom parallèles.* (**Fig. 19. Ep. 20-3.**)

Pour avoir les premières projections d' et c' des deux droites parallèles d et c il faut, par ces droites, mener des plans perpendiculaires à P_1, et déterminer leurs droites d'intersection avec P_1. Ces plans projetants, formés respectivement par les droites d et aa', c et bb', deux-à-deux parallèles, sont parallèles et donnent d' parallèle à c'. On démontre de la même manière que les secondes projections d'' et c'' sont parallèles.

Réciproquement. *Si les projections de même nom de deux droites sont parallèles, ces droites, dans l'espace, sont parallèles.*

Les premiers plans projetants des droites d et c sont parallèles, comme plans perpendiculaires à P_1 menés suivant des droites d' et c' qui sont parallèles. Les seconds plans projetants de d et c étant également parallèles, leurs intersections avec les premiers, ou les droites d et c, sont parallèles.

Exceptions. *Deux droites parallèles perpendiculaires à l'axe, et deux droites parallèles situées dans un ou des plans perpendiculaires à l'axe, ont leurs projections de même nom parallèles, — mais la reciproque n'est pas toujours vraie.*

Le parallélisme des projections et leur perpendicularité à l'axe indiquent seulement que les droites correspondantes de l'espace sont perpendiculaires à l'axe, ou dans des plans perpendiculaires à cette ligne, mais n'autorisent nullement à affirmer que ces droites sont parallèles.

51. Droites qui se croisent. *Deux droites se croisent lorsqu'elles ne sont pas parallèles et qu'elles ne se rencontrent pas, donc lorsqu'elles ne sont pas situées dans un seul et même plan.* (**Ep. 20-4.**)

Les projections de ces droites ne jouissent pas des propriétés énoncées pour celles des droites parallèles et des droites qui se rencontrent.

Donc, les projections de même nom ne sont pas parallèles et leurs points d'intersection, dans le cas où elles se rencontrent, ne sont pas unis par une perpendiculaire à l'axe, et réciproquement.

—

Des différentes positions d'une droite à l'égard d'un plan.

—

52. Différentes positions.

Une droite peut	être située dans un plan		(1.
	être parallèle à un plan	quelconque	(2.
		perpendiculaire à l'un des plans de projection	(3.
		perpendiculaire à l'axe	(4.
	couper le plan	sous un angle quelconque	(5.
		à un angle droit	(6.

53. Droite située dans un plan. L'inspection des projections de la droite et des traces du plan ne suffit pas pour reconnaître si la droite est dans le plan.

Propriété. *Si une droite est dans un plan, les points où cette droite perce les plans de projection sont sur les traces du plan, et réciproquement.*

54. Droite parallèle à un plan quelconque. La simple inspection de l'épure ne fournit aucune propriété de laquelle on puisse déduire le parallélisme de la droite et du plan.

Propriété. *Si une droite est parallèle à un plan, elle doit être parallèle à une droite du plan.*

55. Droite parallèle à un plan perpendiculaire à P_1, ou à P_2. *Si une droite est parallèle à un plan perpendiculaire à* P_1, *ou à* P_2, *les projections de la droite et du plan sur* P_1 *ou sur* P_2 *sont parallèles, et réciproquement.* (**Fig. 21.**)

Le plan T, perpendiculaire à P_1, est parallèle au plan projetant de d. Ce dernier plan, en effet, est déterminé par d parallèle à T et par aa' perpendiculaire à P_1, donc parallèle à T. Le plan projetant de d est donc parallèle à T, par suite, sa trace d' sur P_1 est parallèle à la trace T_1 de T sur P_1. Or, d' et T_1 sont respectivement les projections de d et de T sur P_1.

On prouverait de la même manière que si d était parallèle à un plan S perpendiculaire à P_2, sa projection sur P_2 serait parallèle à la trace-projection de S sur P_2.

Réciproquement. *Si la projection d'une droite sur l'un des deux plans de projection est parallèle à la trace de même nom d'un* *plan* T *perpendiculaire à ce plan de projection. la droite de l'espace est parallèle à ce plan* T.

Cette droite est, en effet, située dans un plan projetant parallèle à T.

56. Droite parallèle à un plan perpendiculaire à l'axe. *Si une droite est parallèle à un plan perpendiculaire à l'axe, les projections de la droite sont parallèles aux traces de même nom du plan, et réciproquement.*

Cette propriété n'est qu'un corollaire de la propriété précédente.

57. Droite qui rencontre un plan sous un angle quelconque. La simple inspection des projections de la droite et des traces du plan ne suffit pas pour reconnaître si la droite rencontre le plan, et encore moins pour savoir sous quel angle cette rencontre se produit.

58. Droite perpendiculaire à un plan. *Si une droite est perpendiculaire à un plan, les projections de la droite sont perpendiculaires aux traces de même nom du plan.* (**Fig. 22.**)

En effet, le premier plan projetant de d est normal à T, comme plan mené suivant la droite d normale à T. Ce plan projetant étant également normal à P_1, il sera normal à T_1, intersection de T et de P_1. La trace T_1 est donc, à son tour, normale au premier plan projetant de d, donc à toute droite passant par son pied m dans ce plan, donc à d', projection de d sur P_1. Ce qu'il fallait démontrer.

On prouvera de même que la seconde projection d'' est perpendiculaire à la seconde trace T_2 du plan T.

Réciproquement. *Si les projections d'une droite sont perpendiculaires aux traces de même nom d'un plan, cette droite, dans l'espace, est perpendiculaire à ce plan.* (**Epure 23**).

La droite d de l'espace, dont les deux projections sont d' et d'', respectivement perpendiculaires à T_1 et à T_2, se trouve à l'intersection des deux plans projetants dont d' et d'' sont les traces-projections.

Or, le plan projetant mené par d' est normal à P_1 et perpendiculaire au plan T, puisqu'il est perpendiculaire à T_1, droite de ce plan.

Le plan projetant mené par d'' est normal à P_2 et perpendiculaire à T, comme étant perpendiculaire à T_2, droite de ce plan.

La droite d de l'espace, intersection de ces plans projetants, sera donc perpendiculaire à T. Ce qu'il fallait démontrer.

Exception. *La réciproque n'est pas toujours vraie, si le plan* T *a ses deux traces parallèles à l'axe.*

Les deux plans projetants se confondront et ne formeront qu'un seul plan perpendiculaire à l'axe, dans lequel la droite sera située. Toute position de cette droite dans ce plan s'accusera par des projections perpendiculaires à l'axe.

—

Des différentes positions que deux plans peuvent avoir entre eux.

—

59. Différentes positions.

Deux plans	sont parallèles		(1.
	ou se coupent	sous un angle quelconque	(2.
		à angle droit.	(3.

—

60. Plans parallèles. *Deux plans parallèles ont leurs traces de même nom parallèles.* **(Epure 25-1.)**

Les traces sur P_1 sont parallèles ; elles résultent de l'intersection de P_1 avec les deux plans donnés qui sont parallèles. Il en est de même des traces des plans sur P_2.

Réciproquement. *Si les traces de même nom de deux plans sont parallèles, ces plans le sont également*

En effet, le plan L contient deux droites, ses traces T_1 et T_2, respectivement parallèles à deux autres droites S_1 et S_2, traces du plan S, donc droites de ce plan.

Exception. La réciproque précédente n'est pas toujours vraie, si les deux traces de chacun des deux plans sont parallèles à l'axe.

Les deux plans seront parallèles à l'axe et peuvent se couper suivant une droite parallèle à cet axe.

61. Plans qui se coupent. *Deux plans qui se coupent ont, en général, leurs traces de même nom qui se coupent, et réciproquement.* **(Epure 25-2.)**

Exceptions. *Deux plans dont les deux traces sont parallèles à l'axe peuvent se couper suivant une droite parallèle à cet axe.*

Deux plans ayant leurs traces sur l'un des plans parallèles se coupent suivant une droite parallèle à ces traces, et réciproquement.

La simple inspection des traces des deux plans dans les épures ne fournit, en général, aucun indice pour juger de la valeur de l'angle sous lequel les deux plans se rencontrent, si ce n'est dans les cas particuliers suivants :

62. Plans perpendiculaires. *Si deux plans sont perpendiculaires, et si l'un d'eux est normal à l'un des deux plans de projection, les traces des deux plans sur ce plan de projection se rencontrent à angle droit.*

Soit (**Fig. 24**) le plan r perpendiculaire au plan T, lequel est normal à P_1. Puisque P_1 et r sont perpendiculaires à T, leur intersection commune ou r_1 le sera également. r_1, perpendiculaire à T, sera perpendiculaire à toute droite passant par son pied m dans ce plan, donc à T_1.

Réciproquement. *Si de deux plans, l'un est perpendiculaire à l'un des plans de projection, et que les traces des deux plans sur ce plan de projection sont perpendiculaires, les deux plans le sont également.* (**Epure 25-3.**)

En effet, la trace R_1 de R sur P_1 est perpendiculaire à T_1, donc au plan T, car toute normale à l'arête d'un dièdre droit, située dans l'une des faces de ce dièdre, est perpendiculaire à l'autre face. Le plan R, contenant une normale au plan T, sera perpendiculaire à ce plan.

63. Plans perpendiculaires au même plan de projection. *Si deux plans sont perpendiculaires au même plan de projection, l'angle de leurs traces sur ce plan mesure l'angle dièdre des deux plans.* (**Epure 25-4.**)

Chapitre IV.

—

Positions particulières du point, de la droite et du plan. Plans bissecteurs. Positions symétriques.

Positions du point, de la droite et du plan par rapport aux plans bissecteurs.

—

64. Définitions. — Notations. — Premier plan bissecteur. Désignons par B_1 et appelons *premier plan bissecteur*, le plan qui divise les angles dièdres I et III en deux parties égales.

L'axe de projection divisera ce plan en deux nappes :

Celle du premier dièdre sera positive et désignée par $+ B_1$;

Celle du troisième dièdre sera négative et désignée par $- B_1$.

65. Second plan bissecteur. Désignons par B_2 et appelons *second plan bissecteur,* le plan qui divise les angles dièdres II et IV en deux parties égales.

L'axe de projection divisera ce plan en deux nappes :

Celle du deuxième dièdre sera positive et désignée par $+ B_2$;

Celle du quatrième dièdre sera négative et désignée par $- B_2$.

66. Positions du point par rapport aux deux plans bissecteurs. (Fig. 26.)

$$\text{Un point peut être situé dans} \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} +B_1 \ldots (1. \\ +B_2 \ldots (2. \\ -B_1 \ldots (3. \\ -B_2 \ldots (4. \end{array} \right.$$

Pour chacune de ces quatre positions du point, les deux hauteurs sont égales.

Ainsi, pour le point a, on aura : $aa'' = aa'$ etc.

Le tableau suivant donnera les signes des hauteurs et des ordonnées, ainsi que leurs positions, pour les différentes positions du point par rapport aux deux plans bissecteurs.

POSITIONS DU POINT	SIGNES		Positions après rabattement de P_1 sur P_2.		REMARQUES.
	1re ordonnée ou 2e hauteur.	2e ordonnée ou 1re hauteur.	1re projection et 1re ordonnée.	2e projection et 2e ordonnée.	
Point dans $+B_1$.	positives	positives	au-dessous de l'axe	au-dessus de l'axe	Les deux projections sont symétriques.
Point dans $+B_2$.	négatives	positives	au-dessus de l'axe	au-dessus de l'axe	Les deux projections coïncident. (Projection double.)
Point dans $-B_1$.	négatives	négatives	au-dessus de l'axe	au-dessous de l'axe	Les deux projections sont symétriques.
Point dans $-B_2$.	positives	négatives	au-dessous de l'axe	au-dessous de l'axe	Les deux projections coïncident. (Projection double.)

67. En résumant les propriétés des projections du point dans ses différentes positions, nous pouvons poser les lois suivantes :

I. *Si un point est situé sur une des deux nappes d'un plan bissecteur, les ordonnées de ce point sont égales.*

Réciproquement *Si, dans une épure, les ordonnées des projections d'un point sont égales, on peut affirmer que ce point, dans l'espace, est situé sur une des deux nappes d'un plan bissecteur.*

II. *Tout point du premier plan bissecteur a ses deux projections symétriques par rapport à l'axe.*

Réciproquement. *Un point dont les projections sont symétriques par rapport à l'axe, se trouve, dans l'espace, dans le premier plan bissecteur.* (**Epure 27-1-2.**)

Ce point est dans $+ B_1$ ou $- B_1$, suivant que sa première projection se trouve au-dessous ou au-dessus de l'axe.

III. *Tout point du second plan bissecteur a ses deux projections qui coïncident sur le plan de figure, et forment une* **projection-double.**

Réciproquement. *Si les deux projections d'un point coïncident et forment une projection-double, le point appartient, dans l'espace, au second plan bissecteur.*

Ce point est dans $+ B_2$ ou $- B_2$, suivant que cette projection-double est au-dessus ou au-dessous de l'axe. (**Epure 27-3 et 4.**)

—

Positions de la droite par rapport aux deux plans bissecteurs.

—

Une droite peut être	située dans	B_1	(1.
		B_2	(2.
	parallèle à	B_1	(3.
		B_2	(4.
	perpendiculaire à . . .	B^1	(5.
		B_2	(6.
	oblique aux deux plans B_1 et B^2 .		(7.

68. Droite située dans B_1. Un point du premier plan bissecteur B_1 ayant ses deux projections symétriques par par rapport à l'axe, il s'ensuit que :

Toute droite de B_1 *a ses deux projections également inclinées sur l'axe, et se rencontrant en un point de cette ligne, et réciproquement.* (**Epure 29-1**.)

La droite est dans $+ B_1$ ou $— B_1$, suivant que sa première projection, sur le plan de figure, se trouve au-dessous ou au-dessus de l'axe.

La droite perce les deux plans P_1 et P_2 sur l'axe, et ce point est sa première trace, en même temps que sa trace sur P_2.

69. Droite située dans B_2. Chacun des points de la droite aura ses deux projections qui n'en forment qu'une sur le plan de figure. De là, il résulte que :

Toute droite de B_2 *n'a qu'une seule* **projection-double**, *et réciproquement, toute droite dont les deux projections coïncident est une droite de* B_2. (**Epure 29-2**.)

La droite est dans $+ B_2$ ou dans $— B_2$, suivant que sa projection-double est au-dessus ou au-dessous de l'axe.

Les traces de la droite coïncident sur l'axe et n'en forment qu'une.

70. Droite parallèle à B_1. Une droite est parallèle à B_1 si elle est parallèle à une droite de B_1. Comme cette dernière droite a ses projections symétriques par rapport à l'axe, on voit que :

Toute droite parallèle à B_1 *a ses deux projections également inclinées sur l'axe, en sens inverse, et sans se rencontrer sur l'axe, et réciproquement.* (**Epure 29-3**).

71. Droite parallèle à B_2. *Toute droite parallèle à* B_2 *aura ses deux projections parallèles, donc également inclinées sur l'axe et dans la même direction.* (**Epure 29-4**).

En effet, une droite, pour être parallèle à B_2, doit être parallèle à une droite de B_2, laquelle droite n'a qu'une projection-double.

Réciproquement. *Toute droite dont les deux projections sont parallèles est une droite du second plan bissecteur.*

Une telle droite est, en effet, parallèle à une certaine droite n'ayant qu'une projection-double, droite du second plan bissecteur.

72. Droite perpendiculaire à B_1. (Fig. 28.) Une droite d perpendiculaire à B_1 aura pour projections deux droites se confondant en une seule perpendiculaire à l'axe.

Une telle droite rencontre chacun des deux plans de projection sous un angle de 45 degrés, et les ordonnées de ses traces t_2 et t_1 sont égales.

En prenant sur cette droite un point quelconque a, on voit que la somme des ordonnées $oa'' + oa' = aa' + oa' = t_2 a'' + a''o = t_2 o$ $= t_1 o =$ l'ordonnée de l'une des traces de la droite.

Pour un autre point de d dans le 2ᵉ dièdre, la même relation existe encore, en observant toutefois la règle des signes des ordonnées.

Propriétés. *Toute droite perpendiculaire à* B_1 *se projette suivant une seule perpendiculaire à l'axe; les deux traces de cette droite sont symétriques, et la somme algébrique des ordonnées d'un point est constante et égale à l'ordonnée de l'une des traces*, ou, ce qui revient au même, *égale à la moitié de la distance qui sépare les deux traces, et réciproquement*. (**Epure 29-5**.)

Remarque. La droite est située dans le troisième dièdre, si la première trace de cette droite, ou la première projection d'un de ses points, est au-dessus de l'axe sur le plan de figure.

73. Droite perpendiculaire à B_2. D'après ce qui précède et d'après la **figure 28**, on voit que :

Toute droite perpendiculaire à B_2 *a ses deux projections qui se confondent en une seule perpendiculaire à l'axe; les deux traces se confondent en une seule,* **la trace-double de la droite**, *et la somme algébrique des ordonnées d'un point quelconque de cette droite est constante et égale à l'ordonnée de la trace-double.*

Réciproquement. *Toute droite qui se projette suivant une seule perpendiculaire à l'axe, et dont les traces se confondent en une seule trace-double, et pour laquelle droite la somme algébrique des ordonnées d'un point quelconque est constante et égale à l'ordonnée de la trace-double, est une droite qui, dans l'espace, est perpendiculaire au second plan bissecteur.* (**Epure 29-6**.)

74. Droite inclinée sur les deux plans bissecteurs. Une telle droite ne jouit d'aucune des propriétés caractéristiques des positions ci-dessus mentionnées. (**Epure 29-7.**)

75. Trace d'une droite sur les plans bissecteurs. La droite peut être perpendiculaire à l'un des deux plans bissecteurs ou oblique à chacun de ces deux plans. Dans les deux cas :

La trace sur B_1 est le point à *projections symétriques* de la droite. Cette trace est celle de la droite sur B_1 ou sur $-B_1$, suivant que la première projection du point à *projections symétriques* est au-dessous ou au-dessus de l'axe.

La trace sur B_2 est le point à *projection-double* de la droite. Suivant que cette projection-double est au-dessus ou au-dessous de l'axe, ce point représentera la trace de la droite sur $+B_2$ ou sur $-B_2$. Ce point s'obtient en prolongeant les deux projections de la droite jusqu'à leur rencontre.

76. Formulaire pour reconnaître les différentes positions d'une droite par rapport aux deux plans bissecteurs, à la simple inspection de ses projections dans une épure.

Si les deux projections de la droite sont également inclinées sur l'axe,	chacune en sens contraire et se rencontrent,	sur l'axe	la droite est	dans B_1;
		en dehors		parallèle à B_1;
	chacune dans le même sens et se rencontrent,	sur l'axe	la droite est	dans B_2;
		à l'infini		parallèle à B_2.
Si les deux projections ne forment qu'une perpendiculaire à l'axe, et si ces deux projections admettent	un point à projections symétriques		la droite est perpendiculaire	à B_1,
	un point à projection-double			à B_2.

Positions du plan par rapport aux deux plans bissecteurs.

---

77. Différentes positions du plan.

Un plan peut être	parallèle à	B_1. . . .	(1.
		B_2. . . .	(2.
	perpendiculaire à. . . .	B_1. . . .	(3.
		B_2. . . .	(4.
	oblique à B_1 et à B_2		(5.

78. Plan parallèle à B_1. *Tout plan parallèle à* B_1 *a ses deux traces parallèles à l'axe et coïncidentes sur le plan de figure, et réciproquement.* **(Epure 32-2.)**

En effet, **Fig. 30**, de tels plans q et r rencontreront les plans P_1 et P_2 suivant des droites parallèles à l'axe, et comme ces plans doivent faire 45° avec les plans de projection, les traces q_1 et q_2 de q, ainsi que r_1 et r_2 de r sont à égales distances de l'axe et coïncideront par suite sur le plan de figure.

Sur le plan de figure les traces de q coïncideront au-dessus de l'axe et les traces de r au-dessous de cette ligne.

Remarque. *Suivant que les traces coïncident au-dessus ou au-dessous de l'axe, le plan parallèle à* B_1 *se trouve au-dessus ou au-dessous de* B_1.

79. Plan parallèle à B_2. *Tout plan parallèle à* B_2 *a ses deux traces parallèles à l'axe et symétriques par rapport à cette ligne sur le plan de figure, et réciproquement.* **(Epure 32-2.)**

Le raisonnement précédent et la **figure 31** montrent que les traces de s sont parallèles et à égales distances de l'axe A, donc symétriques sur le plan de figure par rapport à cet axe.

Il en sera de même des traces t_1 et t_2 de t.

Pour le plan s, la deuxième trace s_2 sera au-dessous de l'axe, et pour le plan t sa trace t_2 sera au-dessus de cette ligne.

Remarque. *Suivant que la deuxième trace d'un plan parallèle à* B_2 *est au-dessus ou au-dessous de l'axe, ce plan sera, dans l'espace, au-dessus ou au-dessous du plan* B_2.

80. Plan perpendiculaire à B_1. *Tout plan perpendiculaire à* B_1, *mais non parallèle en même temps à* B_2, *a ses deux traces également inclinées sur l'axe et symétriques par rapport à cette ligne, et réciproquement.* **(Epure 32-3.)**

Un tel plan est, en effet, mené suivant une perpendiculaire à B_1 ; les traces d'une telle droite sont sur les traces de mêmes noms du plan et symétriques par rapport à l'axe (**72**). Les traces du plan devant passer par ces points symétriques et se rencontrer sur l'axe, sont donc nécessairement deux lignes symétriques par rapport à cet axe.

81. Plan perpendiculaire à B_2. *Tout plan perpendiculaire à B_2, mais non parallèle en même temps à B_1, a ses deux traces également inclinées sur l'axe et coïncidentes en formant une* **trace-double**, *et réciproquement.* (**Epure 32-1**.)

Un tel plan est, en effet, mené suivant une droite perpendiculaire à B_2, laquelle droite a ses deux traces qui coïncident sur le plan de figure (**73**). Les traces du plan sont donc en ligne droite et forment une trace-double.

82. Plan incliné sur B_1 et B_2. Les deux traces sont quelconques et ne jouissent d'aucune des propriétés qui caractérisent les positions particulières précédentes.

83. Traces principales d'un plan. *On nomme* **traces principales** *d'un plan les lignes droites suivant lesquelles ce plan rencontre les deux plans bissecteurs.*

Les traces principales concourent avec les traces ordinaires du plan en un même point de l'axe.

Problème. *Construire les traces principales d'un plan.* (Voir plus loin. — Applications. — Problèmes.)

84. Formulaire pour reconnaître les différentes positions du plan à l'égard des plans bissecteurs, à la simple inspection des traces de ces plans sur le plan de figure.

Suivant que les traces du plan sont	parallèles à l'axe,	symétriques par rapport à l'axe ou coïncidentes,	le plan dans l'espace est	parallèle à	B_1 B_2,	et réciproquement.
	ou					
	inclinées sur l'axe	symétriques par rapport à l'axe ou coïncidentes,		perpendiculaire à	B_1 B_2,	

Positions symétriques de points, droites et plans par rapport aux plans de projection et aux plans bissecteurs.

Positions symétriques par rapport aux plans de projection.

85. Généralités. — Définitions. *Deux points sont symétriques par rapport à un plan, lorsque la droite qui les unit est perpendiculaire au plan et divisée par ce dernier en parties égales.*

Couple de points symétriques. *Ces deux points constituent un couple de points symétriques par rapport à ce plan.*

Plan de symétrie. *Le plan sera le plan de symétrie de ce couple.*

Lignes symétriques par rapport à un plan. *Deux lignes sont symétriques par rapport à un plan, lorsqu'à chaque point de l'une des lignes correspond sur l'autre ligne un point symétrique par rapport au plan, lequel est le plan de symétrie de deux lignes.*

Ces lignes sont { droites, planes ou gauches.

86. Couple de droites symétriques. *Si les lignes symétriques sont des droites, elles forment un couple de droites symétriques par rapport au plan de symétrie.*

Axe de symétrie. Les deux droites symétriques sont situées dans un plan perpendiculaire au plan de symétrie, et coupant ce dernier suivant une droite appelée **axe de symétrie.**

Sommet de symétrie. Chaque point de l'une des deux droites a son point symétrique sur l'autre. Si la distance qui unit ces points symétriques devient nulle, ces points se confondent et se trouvent dans le plan de symétrie, sur l'axe et sur les deux droites. *Ces points n'en forment qu'un seul appelé le sommet de symétrie.*

Propriétés. I. *L'axe de symétrie passe par le sommet de symétrie et divise l'angle des deux droites en deux parties égales.*

II. *Le sommet de symétrie est à l'infini si les deux droites sont parallèles au plan de symétrie.*

87. Couple de plans symétriques. *Deux plans sont symétriques par rapport à un plan de symétrie, lorsque chaque point du premier plan a son symétrique dans l'autre plan, ou encore, lorsqu'une perpendiculaire quelconque au plan de symétrie les perce en deux points formant un couple symétrique par rapport au plan de symétrie.*

Deux plans symétriques par rapport à un plan donné forment un couple de plans symétriques par rapport à ce plan.

Axe de symétrie. Les deux plans symétriques sont également inclinés sur le plan de symétrie, lequel est le plan bissecteur du dièdre des plans donnés.

L'intersection commune des deux plans sera une droite du plan de symétrie. Cette droite est l'axe de symétrie des deux plans et en même temps la trace commune sur le plan de symétrie.

Propriétés. I. *Une droite du premier plan a, dans le deuxième plan du couple, sa droite symétrique par rapport au plan de symétrie.*

II. *Le sommet de symétrie de ces deux droites et, en général, de tous les couples symétriques contenus dans les deux plans symétriques, se trouve sur l'axe de symétrie, la trace commune de ces plans.*

III. *L'axe de symétrie des deux plans est donc le lieu géométrique des sommets de symétrie de tous les couples de droites symétriques contenues dans les plans donnés.*

IV. *Pour deux droites symétriques parallèles au plan de symétrie, et par suite à l'axe de symétrie des deux plans, le sommet de symétrie se trouve à l'infini et les deux droites sont parallèles.*

Couple de points symétriques par rapport aux plans de projection.

Le couple peut être symétrique par rapport à	$+P_1$;	tel est le couple des points	A et B.	**Epure 34**	(1.
	$-P_1$;		C et D.		(2.
	$+P_2$;		A et C.		(3.
	$-P_2$;		B et D.		(4.

88. Les principes exposés (**85**) et la (**Fig. 33**) montrent que pour ces quatre couples, les hauteurs et les ordonnées de ces points jouissent des propriétés communes suivantes :

Propriété. *Si deux points sont symétriques par rapport à une des deux nappes de l'un des deux plans de projection, les hauteurs de ces points sur ce plan sont égales et de signes contraires ; les hauteurs sur l'autre plan de projection sont égales et de mêmes signes.*

De là il résulte, *que les projections sur le plan de symétrie se confondent et que, sur l'autre plan de projection, les projections de ces points sont symétriques par rapport à l'axe.*

—

Couple de droites symétriques par rapport aux plans de projection.

89. Les propriétés énoncées pour un couple de points symétriques par rapport à un des plans de projection s'appliquent à deux et plusieurs couples, tels que *a* et *c*, *b* et *d*, *f* et *e*.

Il est donc facile de déduire de la **figure 35** et de ce qui précède, les propriétés suivantes :

Propriétés. I. *Deux couples de points symétriques déterminent un couple de droites symétriques.*

II. *Un couple de droites symétriques par rapport à un plan de projection se projette sur ce plan, son plan de symétrie, suivant une seule droite, l'axe de symétrie du couple, et sur l'autre plan de projection suivant deux droites symétriques par rapport à l'axe de projection.*

III. *La projection du sommet de symétrie du couple sur le plan de projection qui n'est pas plan de symétrie, se trouve sur l'axe de projection, au point de concours des projections des deux droites sur ce plan.*

IV. *L'axe de projection sera la bissectrice de l'angle des projections des deux droites.*

V. *La trace du plan du couple sera normale à l'axe et au plan de symétrie.*

Planche III, Fig. 35 et **Epure 36.** Couple de droites symétriques par rapport à P_2.

Fig. 37 et **Epure 38.** Couple de droites symétriques par rapport à P_1.

Couple de plans symétriques par rapport aux plans de projection.

90. Couple de plans symétriques par rapport à P_1. La trace sur P_1 sera commune et formera l'axe de symétrie du couple (**87**). La trace sur P_2 du premier plan devra avoir, dans le deuxième plan du couple, sa droite symétrique par rapport à P_1, plan de symétrie (**87**). Cette droite symétrique sera dans le plan P_2 et formera donc la deuxième trace du deuxième plan, symétrique à la deuxième trace du premier plan. Donc,

Propriété. *Deux plans symétriques par rapport à* P_1 *ont même trace sur* P_1, *et leurs traces sur* P_2 *sont symétriques par rapport à l'axe de projection.* (**Epure 39-1.**)

91. Couple de plans symétriques par rapport à P_2. *Deux plans symétriques par rapport à* P_2 *ont même deuxième trace, et leurs traces sur* P_1 *sont symétriques par rapport à l'axe de projection.* (**Epure 39-2.**)

Remarque. Si, dans les cas précédents, l'axe de symétrie des deux plans, leur trace commune sur le plan de symétrie, devient parallèle à l'axe de projection, le sommet de projection des deux autres traces devant être sur l'axe de symétrie et sur l'axe de projection, sera à leur point de rencontre qui se trouve reculé à l'infini.

Dans ce cas particulier, *les traces symétriques sont parallèles à l'axe de projection.* (**Epure 39-3.**)

—

Positions symétriques par rapport aux plans bissecteurs.

—

Couple de points symétriques par rapport aux plans bissecteurs.

92. Couple de points symétriques par rapport à B_1. Les deux points *a* et *b*, symétriques par rapport à B_1 ont leurs hauteurs et leurs ordonnées de noms contraires égales. (**Fig. 40.**)

Donc, $a''\,A = b'\,A$ et $b''\,A = a'\,A$. Propriété qui résulte de l'égalité des deux trapèzes $a''abb''$ et $aa'b'b$.

Propriété. *En rabattant* P_1 *sur* P_2, *les projections des points a et b se trouvent sur une seule et même perpendiculaire à l'axe de projection, et les projections de noms contraires des deux points symétriques par rapport à* B_1 *sont symétriques par rapport à l'axe, et réciproquement.* (**Epure 41.**)

93. Couple de points symétriques par rapport à B_2. Les deux points *a* et *b* (**Fig. 42.**) ont encore leurs hauteurs et leurs ordonnées de noms contraires égales.

Propriété. *En rabattant* P_1 *sur* P_2, *les projections des deux points se trouvent sur une perpendiculaire à l'axe, et les projections de noms contraires des deux points symétriques par rapport à* B_2 *se confondent, et réciproquement.* (**Epure 43.**)

Formulaire pour reconnaître deux points qui forment un couple symétrique par rapport aux plans bissecteurs.

Si toutes les projections de deux points sont sur ne même perpendiculaire à l'axe de projection,	et que les projections de noms contraires	sont symétriques par rapport à l'axe	les deux points sont symétriques par rapport	à B_1	et réciproquement.
		ou			
		se confondent en une seule,		à	

—

Couple de droites symétriques par rapport aux plans bissecteurs.

94. Couple de droites symétriques par rapport à B_1. Si deux droites sont symétriques par rapport à B_1, chaque point de l'une des deux droites du couple a son symétrique sur l'autre droite.

Propriété. *Les projections de noms contraires des deux droites symétriques par rapport à* B_1 *sont symétriques par rapport à l'axe de projection.* (**Epure 44.**)

Les traces du plan du couple de ces deux droites seront symétriques par rapport à l'axe. Ce plan étant perpendiculaire à B_1.

Le sommet de symétrie des deux droites, point de rencontre de ces droites avec B_1, sera le point de ces droites dont les projections seront symétriques par rapport à l'axe de projection. Les deux axes de symétrie A s'' et A s' du couple des deux droites ont aussi leurs projections symétriques par rapport à l'axe de projection.

95. Couple de droites symétriques par rapport à B_2. Si deux droites sont symétriques par rapport à B_2, chaque point de l'une des droites a son symétrique sur l'autre.

Propriété. *Les projections de noms contraires des deux droites symétriques par rapport à* B_2 *coïncident.* (**Epure 45.**).

Le plan du couple étant perpendiculaire à B_2, les traces de ce plan coïncident.

Le sommet de symétrie, point sur les droites et dans B_2, est un point à projection-double se projetant en $s's''$.

L'axe de symétrie A s aura ses deux projections coïncidentes, comme droite située dans B_2, A étant le point de rencontre du plan du couple des deux droites symétriques avec l'axe de projection.

Formulaire pour reconnaître deux droites qui forment un couple symétrique par rapport aux plans bissecteurs.

Suivant que les projections de noms contraires de deux droites	coïncident ou sont symétriques par rapport à l'axe,	ces plans forment un couple symétrique par rapport	à B_2, à B_1.

—

Couple de plans symétriques par rapport aux plans bissecteurs.

96. Couple de plans symétriques par rapport à B_1. *Si deux plans sont symétriques par rapport à* B_1, *les traces de noms contraires de ces plans sont symétriques par rapport à l'axe de projection.* (**Epure 47.**)

En effet, soient les deux plans q et r, **Fig. 46**. Chaque point du plan q aura son symétrique par rapport à B_1 dans le plan r. Le point a, appartenant à la trace q_2, aura son symétrique b dans le plan r. Or b sera dans r et sur P_1, donc b' est un point de la première trace de r, laquelle est par suite symétrique à la seconde trace de q par rapport à l'axe de projection.

On démontrera de même que la seconde trace de r est symétrique à la première trace de q par rapport à l'axe de projection.

Remarque. Le point F, intersection commune de l'axe de projection avec les deux plans qui doivent y passer, est un point de l'axe de symétrie du couple, lequel axe est la **trace principale commune** aux deux plans.

97. Couple de plans symétriques par rapport à B_2. *Si deux plans sont symétriques par rapport à B_2, les traces de noms contraires de ces plans coïncident.* (**Epure 49.**)

En effet, le point a du plan Q, point situé dans P_2, donc sur la seconde trace de Q, aura son symétrique b dans R situé dans — P_1, donc sur la première trace de R. (**Fig. 47** bis.) Après le rabattement de — P_1 sur P_2, b coïncidera avec a et, par suite, la première trace de l'un des deux plans du couple coïncidera avec la seconde trace de l'autre plan. On prouvera de même que Q_1 et R_2 coïncident.

Remarques. I. L'axe de symétrie du couple sera une droite passant par F et par un point à **projection-double** des deux plans.

II. Les traces des plans du couple peuvent être parallèles à l'axe de projection dans chacun des deux cas précédents. Pour cela, il faut que l'intersection commune des plans avec les plans bissecteurs soit parallèle à l'axe.

Formulaire pour reconnaître deux plans qui forment un couple symétrique par rapport aux plans bissecteurs.

Suivant que les traces de noms contraires de deux plans	coïncident ou sont symétriques par rapport à l'axe	Ces plans sont symétriques par rapport	à B_2, ou à B_1.

Positions symétriques par rapport à un plan quelconque.

98. L'inspection des projections des points et des droites, ainsi que des traces des droites et des plans ne suffit pas pour reconnaître si deux points, deux droites ou deux plans forment un conple symétrique par rapport à un plan de symétrie donné.

Pour construire un point, une droite ou un plan, symétriques aux mêmes éléments par rapport à un plan donné, on se base sur les définitions données pour ces couples, et l'on effectue des constructions graphiques que nous développerons dans le chapitre des applications.

NOTATIONS CONVENTIONNELLES EMPLOYÉES DANS LE TRACÉ DES ÉPURES.

99. Solution dans l'espace. Dans tout problème, l'énoncé des opérations successives à effectuer sur les données pour arriver au résultat, constitue **l'analyse** du problème, la **solution dans l'espace.**

Solution graphique. — Epure. La traduction en lignes des opérations énoncées en mots dans la solution dans l'espace, constitue la **solution graphique,** l'**épure** du problème.

Eléments principaux d'une épure. Dans toute épure on distingue :

1° **Les données du problème,** c'est-à-dire les projections de ces données sur P_1 et P_2 ;

2° Les projections des différentes opérations que l'on exécute successivement sur ces données pour arriver au résultat ;

L'ensemble de ces constructions portera le nom de **lignes auxiliaires.** Ces lignes peuvent représenter les projections de lignes de l'espace ou les traces des plans nécessaires à la solution.

3° Les projections du résultat, le **résultat** de l'épure ;

4° Les **lignes de rappel,** lignes qui n'entrent par dans la solution du problème mais qui, dans certains cas, servent à mieux préciser ou à rappeler une construction. Les perpendiculaires à l'axe, par exemple, sont des lignes de rappel.

Dans le tracé des épures on emploie :

1° Le **trait plein,** pour les **données** et le **résultat.** Le trait employé pour le résultat est plus accentué que celui des données. L'axe de projection se marque également par un trait plein et fin ;

2° Le **trait interrompu,** pour les lignes auxiliaires ;

3° Le **trait mixte,** la **chaînette,** pour les traces des plans auxiliaires ;

4° Le **pointillé,** pour les lignes de rappel ;

5° Le **ponctué,** pour les parties cachées des *données* et du *résultat.*

Le **trait interrompu** est une suite de petits traits uniformes, tracés au tireligne, de trois millimètres de long, avec un intervalle de un millimètre au maximum.

Le **trait mixte, la chaînette,** est aussi une suite de petits traits uniformes et de quatre millimètres de long, l'intervalle qui le sépare a trois millimètres et un point rond au millieu (— · — · —). Un tel trait indique un *premier plan auxiliaire.* L'écartement des traits grandit et comprend deux points, trois points etc. suivant que l'on veut indiquer un deuxième, un troisième plans auxiliaires. Dans ce cas, la longueur des traits augmente sans dépasser cinq millimètres, limite adoptée également pour l'intervalle.

Le **pointillé** consiste en une suite de *petits traits uniformes,* d'une longueur de **un** millimètre, avec un intervalle le plus petit possible.

Le trait mixte, le pointillé et le trait interrompu ont même intensité; la grosseur des traits est moindre que celle des données.

Le **ponctuée** est une suite de **points ronds** qui marque les données ou le résultat cachés. L'intensité du ponctué est la même que celle des traits qui marquent les lignes qu'il remplace.

Remarque. Si les épures sont compliquées, comme dans les épures des intersections etc., on remplace, dans les lignes auxiliaires, le trait interrompu par un trait plein, fin, tracé à l'encre bleue. Le pointillé des lignes de rappel est alors remplacé par un trait plein, fin, tracé à l'encre rouge.

Toutes les autres notations se tracent toujours à l'encre de Chine la plus noire possible.

Chapitre VI.

Problèmes. — Applications.

Plan d'études. — Problèmes fondamentaux. — Applications.

100. Dans la solution des problèmes de géométrie par les procédés de la géométrie descriptive, toutes les opérations graphiques à exécuter sur les épures, sont la répétition des opérations que nécessite la solution de quelques problèmes que l'on peut considérer comme fondamentaux.

Ces problèmes sont :

Problème I. *Construire le point de rencontre d'une droite et d'un plan.*

Problème II. *Construire la véritable longueur d'une portion de droite.*

Le premier problème se subdivise suivant que le plan est . . . . . . $\left\{\begin{array}{l}\text{un plan de projection,}\\ \text{un plan bissecteur,}\\ \text{ou un plan quelconque.}\end{array}\right.$

Les deux premières subdivisions admettent des problèmes réciproques.

Nous étudierons ces problèmes fondamentaux, et nous réunirons, sous forme d'applications de chacun d'eux, toutes les questions qui peuvent être résolues par les procédés graphiques qui découlent de la solution du problème fondamental.

Ce qui précède nous dicte le plan d'études suivant :

Premier problème. *Construire les deux traces ordinaires ou principales d'une droite.*

Applications. *Construire les traces ordinaires ou principales d'un plan devant satisfaire à diverses conditions.*

Deuxième problème. *Connaissant les traces ordinaires ou principales d'une droite, construire les deux projections de cette droite.*

Applications. *Construire les projections de l'intersection de deux plans représentés de diverses matières.*

Troisième problème. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan quelconque.*

Applications. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan représenté de diverses manières.*

Quatrième problème. *Construire la véritable longueur d'une portion de droite.*

---

101. Premier problème fondamental. *Construire les deux traces d'une droite.*

Premier cas. *Construire les traces ordinaires d'une droite.*

Solution dans l'espace. La première trace a de la droite d est un point de d et de P_1 ; la première projection a' est donc sur d' et la seconde projection a'' est sur l'axe de projection (**24**) et sur d''. La seconde trace b de la droite est un point de d et de P_2; b'' est donc sur d'', et b' sur l'axe et sur d'.

Solution graphique. (Ep. 50.) On prolongera la première projection d' de la droite d jusqu'à l'axe; en ce point, qui est la première projection de la seconde trace de la droite, on élève une normale à l'axe ; cette normale coupera la projection d'' de la droite en un point qui sera la seconde projection de la trace de d sur P_2.

Pour avoir la première trace a de la droite, on prolongera la projection d'' de d jusqu'à l'axe, pour avoir, en ce point, la projection a'' de la première trace. La première projection a' sera le point de rencontre de la normale élevée en a'' à l'axe, avec la première projection d' de la droite.

Second cas. *Construire les traces principales d'une droite.*

Solution graphique. (**Ep. 51**.) La trace de la droite sur B_1 est le point de d qui a ses deux *projections symétriques* (**66**). Ce point s'obtient en prolongeant d'' jusqu'à l'axe en m, et en menant par m une droite symétrique à d'' par rapport à l'axe ; cette droite auxiliaire coupera d' en α', première projection de la trace de la droite d sur B_1. La projection α'' est sur d'' et sur $\alpha'\,\alpha''$, droite normale à l'axe.

La trace de la droite sur B_2 étant un point de la droite dont les deux projections se confondent en une *projection-double,* ce point sera le point de rencontre β des deux projections d' et d'' de d.

Exercices. Construire les traces principales d'une droite :

1) La droite est parallèle à P_1 ou P_2.

2) La droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection.

3) La droite est dans un plan normal à l'axe, un plan de profil.

102. Applications du premier problème fondamental.

Construire les traces d'un plan assujetti à satisfaire à diverses conditions.

Solution. La solution générale de tous les problèmes qui peuvent se ranger dans les applications du premier problème fondamental, se base sur les principes suivants :

I. *Si un plan contient une droite, les traces ordinaires ou principales de la droite se trouvent sur les traces ordinaires ou principales de même nom du plan.*

II. *Un plan qui passe par une droite d, parallèle à* P_1, *ou par une droite f, parallèle à* P_2, *aura ses traces sur* P_1 *ou sur* P_2 *respectivement parallèles à la droite d ou à la droite f.*

103. Problème I. *Par un point donné sur l'une des traces d'un plan, mener une droite parallèle à l'autre trace.*

Solution. (**Ep. 52**.) Le point a'' donné sur t_2 a sa première projection a' sur l'axe ; la droite demandée a sa première projection d' parallèle à t_1, et sa seconde projection d'' parallèle à l'axe de projection. Ces deux projections d' et d'' passent respectivement par a' et a''.

104. Problème II. *Par une droite, mener un plan perpendiculaire à* P_1 *ou à* P_2.

Solution. (Ep. 53.) Le plan t, mené par d perpendiculairement à P_1, aura d' pour trace-projection sur P_1; sa trace t_2 sera perpendiculaire à l'axe.

Le plan p, mené par d perpendiculairement à P_2, aura pour trace-projeotion sur P_2 la seconde projection d'' de la droite, et pour trace sur P_1 la droite p_1 normale à l'axe,

105. Problème III. *Vérifier si une droite donnée est située dans un plan donné.*

Solution. On construit les traces de la droite; si ces traces sont sur les traces de même nom du plan, la droite est située dans ce plan.

106. Problème IV. *Vérifier si un point donné est situé dans un plan.*

Solution. Si le point donné est dans le plan, une droite parallèle à l'une des deux traces de ce plan et menée par le point, sera entièrement dans le plan; elle aura ses traces sur les traces de même nom de ce plan.

107. Problème V. *Vérifier si une droite donnée est parallèle à un plan donné.*

Solution. (Ep. 54.) Par un point a du plan, on mène une droite parallèle à la droite donnée; celle-ci est parallèle au plan, si cette droite auxiliaire est dans le plan, donc, si les traces de cette dernière sont sur les traces de même nom du plan.

Le point a' est dans le plan, car on l'a pris sur une parallèle à l'une des traces du plan menée par un point situé sur l'autre trace (**103**).

108. Problème VI. *Par deux droites qui se coupent, faire passer un plan.*

Solution. Les traces du plan doivent passer par les traces de même nom des deux droites données.

109. Problème VII. *Mener un plan par deux droites qui se coupent et dont l'une est parallèle à* P_1, *et l'autre parallèle à* P_2.

Solution. (Ep. 55.) Soit d la droite parallèle à P_1 et soit c

celle qui est parallèle à P_2. Le plan p à construire aura ses traces qui passent par les traces de même nom des deux droites.

La trace p_2 sera parallèle à c'' et la trace p_1 sera parallèle à d', car toute droite parallèle à P_1 et située dans le plan p, aura sa projection sur P_1 parallèle à la trace de p sur P_1.

Vérification. Les deux traces du plan se coupent sur l'axe.

110. Problème VIII. *Par deux droites parallèles, faire passer un plan.*

Solution. Les traces du plan passeront par les traces de même nom des deux droites.

111. Problème IX. *Par trois points non en ligne droite, faire passer un plan.*

Première solution. **(Ep. 56.)** Les deux points a et b déterminent une droite ; la parallèle à cette droite menée par le troisième point c détermine avec ab le plan demandé (**110**).

Autre solution. **(Ep. 57.)** En unissant b et a, b et c, on détermine deux droites ab et cb qui se coupent et par lesquelles on fera passer le plan demandé (**108**).

112. Problème X. *Par un point et une droite, faire passer un plan.*

Première solution. Par le point donné, on mène une parallèle à la droite donnée ; elle détermine avec celle-ci le plan demandé (**110**).

Autre solution. On joint le point donné à un point de la droite et l'on a deux droites qui se coupent et qui déterminent le plan demandé (**108**).

113. Problème XI. *Par une droite donnée, mener un plan parallèle à une autre droite donnée.*

Solution. Par un point quelconque pris sur la première droite, on mène une droite parallèle à la seconde. Le plan de ces deux droites sera le plan demandé; il passe par la première droite et contient une droite parallèle à la seconde (**108**).

114. Prolbème XII. *Par une droite donnée, mener un plan parallèle à l'axe de projection.*

Solution. Les traces du plan passent par les traces de même nom de la droite et sont parallèles, toutes les deux, à l'axe de projection.

115. Problème XIII. *Par un point donné, mener un plan parallèle à deux droites données.*

Solution. Par le point, on mène une droite parallèle à la première droite donnée et une autre droite parallèle à la seconde. Ces droites passant par un même point déterminent un plan parallèle aux deux droites données. (**108**).

116. Problème XIV. *Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.*

Solution. (Ep. 58). Le plan demandé aura ces traces parallèles aux traces de même nom du plan donné. Par le point a situé dans le plan à construire passera une parallèle à la première trace de ce plan, parallèle entièrement située dans ce plan et ayant sa trace sur P_2 sur la seconde trace du plan.

On mènera donc par a une droite parallèle à q_1 et par t'', trace de cette droite sur P_2, passera r_2, seconde trace du plan et droite parallèle à q_2. La trace r_2 parallèle à q_1 passera par le point de rencontre de r_2 avec l'axe.

117. Problème XV. *Par une droite donnée, mener un plan perpendiculaire à un plan donné.*

Solution. Par un point de la droite donnée, on abaisse une perpendiculaire sur le plan donné (**58**). Cette perpendiculaire et la première droite déterminent le plan demandé, dont on déterminera les deux traces (**103**).

118. Problème XVI. *Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à une droite donnée.*

Solution (Ep. 59). Le plan demandé aura ses deux traces perpendiculaires aux projections de même nom de la droite donnée (**58**). La direction des deux traces étant connue, le problème est ramené à celui de mener, par le point donné, un plan parallèle à un plan donné (**116**).

219. Problème XVII. *Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à une droite parallèle à* P_1.

Solution. (Ep. 60). La droite d étant parallèle à P_1, le plan demandé sera perpendiculaire à P_1. Sa trace sur P_1 sera perpendiculaire à d' (**58**) et sa seconde trace sera perpendiculaire à l'axe. Les deux traces se déterminent comme dans le problème précédent.

120. Problème XVIII. *Etant donnés un plan et la première projection d'une droite située dans ce plan, déterminer la seconde projection de cette droite.*

Solution. (**Ep. 61.**) La première projection d' de la droite rencontre l'axe en a', première projection du point de la droite situé sur la seconde trace du plan. La seconde projection a'' est donc un point de la projection de la droite sur P_2.

La même première projection d' rencontre q_1 en b', point qui se projette sur P_2 en un point b'' de l'axe de projection. La droite $a''b''$ sera la seconde projection de la droite du plan q, dont d' est la première projection.

121. Problème XIX. *Etant donnés un plan et la première projection d'un point situé dans ce plan, construire la seconde projection de ce point.*

Solution. (**Ep. 62.**). Par la première projection a' du point, nous menons une droite $a'\ b'$ parallèle à la première trace du plan. $a'b'$ sera la première projection d'une droite ab parallèle à la trace q_1, et entièrement située dans le plan q. Cette droite ab rencontre P_2 en un point b dont la première projection b' est sur l'axe, et la projection b'' sur la trace q_2 du plan q; la seconde projection $a''b''$ de ab sera parallèle à l'axe et passera par b''. C'est sur $a''b''$ que se trouvera la projection a'' du point a.

122. Problème XX. *Par une droite donnée, mener un plan perpendiculaire :*

1° *au plan bissecteur* B_1.

Solution. (**Ep. 63.**) Les traces du plan passeront par les traces de même nom de la droite et sont symétriques par rapport à l'axe de projection (**80**).

On déterminera donc un point m symétrique du point a' par rapport à l'axe, et les points m et b'' détermineront la seconde trace du plan demandé. La première trace passera par x et par a'.

2° *au plan bissecteur* B_2.

Solution. (**Ep. 64.**) Les traces du plan devront coïncider et passer par les traces de même nom de la droite (**81**).

La seconde trace du plan passe donc par b'' et, suffisamment prolongée, elle coïncidera avec q_1 et passe par a'.

123. Problème XXI. *Vérifier si une droite donnée est située dans un plan déterminé par l'axe et par un point donné.*

Solution dans l'espace. La droite d est dans le plan donné si les traces de la droite sont sur les traces de même nom du plan, Celles-ci se confondant avec l'axe, les traces de la droite sur P_1 et P_2 se trouveront sur l'axe.

En unissant un point de d au point donné a, on aura une deuxième droite du plan donné, droite qui aura également ses deux traces sur l'axe.

Solution graphique. (**Ep. 65.**) Les deux projections d' et d'' de d doivent se couper sur l'axe. Il en est de même des projections d'une droite quelconque e qui unit un point quelconque b de d au point donné a.

124. Problème XXII. *Quelle position faut-il donner à un triangle isoscèle par rapport à* P_1 *pour que, sur ce plan, les côtés égaux aient des projections égales?*

Solution. Placer la base du triangle parallèle à P_1. (A démontrer à l'aide du théorème des trois perpendiculaires).

—

125. Deuxième problème fondamental. *Connaissant les traces ordinaires ou principales d'une droite, construire les projections de cette droite.*

1er Cas. Traces ordinaires. Solution. (**Ep. 66.**) La première trace t de la droite d est un point de P_1, sa première projection t' sera sur d' et sa seconde projection t'' se trouve sur l'axe (**37**).

La seconde trace s de la droite d est un point de P_2, sa projection s'' est dans P_2 et sur d'', et sa première projection s' se trouve sur l'axe.

Les deux points t et s suffisent pour déterminer la droite d. d' passera par t' et s' et d'' par t'' et s''.

2ᵈ Cas. Traces principales. Solution. (**Ep. 67.**) Soient u la trace de la droite sur B_1 et v la trace sur B_2.

Les deux projections de u sont u'' et u', symétriques par rapport à l'axe ; les deux projections de v forment une projection-double v' v''.

La droite qui unit u'' et v'' sera la seconde projection de la droite demandée ; sa première projection passe par u' et par v'.

Applications du deuxième problème fondamental.

---

126. Problème général. *Construire les deux projections de l'intersection de deux plans représentés de diverses manières.*

Cas général. Solution. Si les deux plans sont représentés chacun par ses deux traces, le point de rencontre des premières traces est le point où la droite d'intersection rencontre P_1, et le point de rencontre des secondes traces des plans sera le point où la droite perce le plan P_2. Ces deux points, dont on construit les deux projections, sont les deux traces de la droite d'intersection des deux plans, droite qui est ainsi déterminée et que l'on construit comme au § 125.

Cas particuliers. I. Suivant que l'un des deux plans est parallèle à P_1 ou à P_2, la droite d'intersection sera parallèle à P_1 ou à P_2.

II. Si l'un des deux plans est perpendiculaire à l'un des plans de projection, la projection de la droite, sur ce plan, coïncidera avec la trace-projection du plan perpendiculaire.

III. Si les deux plans sont perpendiculaires à l'un des plans de projection, la droite d'intersection sera perpendiculaire à ce plan et aura, pour projection sur ce plan, un point.

Cas embarrassants. Solution. Si les deux traces des plans sont disposées d'une manière peu favorable, ou bien si les traces ne sont pas données, on se sert de la solution générale suivante :

On coupe les deux plans par une série de plans auxiliaires, dont on peut construire facilement la droite d'intersection avec chacun des plans donnés. Un premier plan auxiliaire coupe chacun des plans donnés suivant une droite, et ces deux droites d'intersection se rencontrent en un point qui appartient à l'intersection commune des deux plans.

Un deuxième plan auxiliaire donnera un deuxième point de la droite d'intersection commune; un troisième plan fournit un troisième point, et ainsi de suite.

L'ensemble des points sera la droite d'intersection des deux plans.

127. Problème I. *Construire l'intersection des deux plans dont l'un est parallèle à* P_1.

Solution. (Ep. 68). Soient les deux plans r et q, r étant parallèle à P_1.

La droite d'intersection d sera parallèle à P_1; elle n'aura qu'une trace, sa trace sur P_2, et celle-ci est le point de rencontre a'' des traces r_2 et q_2. Comme la droite d est parallèle à q_1 et située dans le plan q, il faut évidemment qu'elle soit parallèle à q_1, donc d' est parallèle à q_1 et d'' parallèle à l'axe. d'' passera par a'' et d' par a', première projection de a''.

128. Problème II. *Construire l'intersection de deux plans dont l'un est parallèle à* P_2.

Solution. (Ep. 69.) La droite d sera parallèle à P_2 et passe par le point de rencontre a' des premières traces des deux plans donnés; elle a ses deux projections d'' et d' respectivement parallèles à q_2 et à l'axe, première projection de q_2 (**127.**)

129. Problème III. *Construire l'intersection de deux plans dont les traces sur* P_1 *sont parallèles.*

Solution. (Ep. 70.) Les deux plans s et t ayant leurs traces s_1 et t_1 parallèles, sont deux plans coupés par un troisième, le plan P_1, suivant des droites parallèles, et doivent se couper eux-mêmes suivant une droite parallèle à s_1 et t_1, donc au plan P_1.

La droite d, intersection des deux plans, est donc parallèle à leurs premières traces et passe par le point de rencontre a'' des traces de ces plans sur P_2.

130. Problème IV. *Construire l'intersection de deux plans dont les traces sur* P_2 *sont parallèles.*

Solution. (Ep. 71.) L'intersection des deux plans sera parallèle à P_2 et aux traces parallèles des deux plans; elle passera par le point de rencontre des deux traces non parallèles.

131. Problème V. *Construire l'intersection de deux plans sans faire usage des points d'intersection des traces.*

Solution. (**Ep. 72.**) On coupe les deux plans donnés s et t par une série de plans parallèles à P_1. Un premier de ces plans coupe chacun des deux plans donnés suivant une droite parallèle à P_1 (**127**); le point d, intersection de ces deux droites, est un point de la droite d'intersection des deux plans.

Chacun des plans auxiliaires sécants donnera un point de l'intersection des deux plans. Tous ces points devront déterminer une droite qui, suffisamment prolongée, passera par les points de rencontre des traces de même nom des deux plans.

Au lieu de couper les deux plans par une suite de plans parallèles à P_1, on peut se servir avec avantage de plans parallèles à P_2.

132. Problème VI. *Construire l'intersection de deux plans dont les traces se rencontrent toutes en un même point de l'axe.*

Solution. On coupe les deux plans par un ou deux plans auxiliaires parallèles à P_1. Chacun de ces plans coupe chacun des plans donnés suivant une droite parallèle à P_1; la rencontre de ces droites fournies par le même plan sécant donne un point de l'intersection des deux plans donnés. (**Ep. 73.**)

Vérification. Les points ainsi construits forment une ligne droite passant par le point de rencontre des traces des deux plans avec l'axe de projection.

133. Problème VII. *Construire l'intersection de deux plans parallèles à l'axe.*

Solution. (**Ep. 74.**) La droite d'intersection est parallèle à l'axe (**61**); elle est déterminée quand on connaît un de ses points que l'on construit de la manière suivante :

On coupe les deux plans donnés par un troisième plan quelconque (**126**); on obtient deux droites dont le point d'intersection appartient à chacun des plans proposés, donc à leur intersection.

134. Problème VIII. *Construire l'intersection de deux plans dont chacun est représenté par deux droites qui se coupent, sans chercher les traces de ces plans.*

Solution. (**Ep. 75.**) On coupe les deux plans donnés par une suite de plans parallèles à P_1. Chacun de ces plans coupera chacune des droites qui déterminent le premier plan en un point, et ces deux points déterminent l'intersection du premier plan donné avec le plan auxiliaire. L'intersection de ce plan auxiliaire avec le second plan donné se construit de la même manière. Le point de rencontre de ces deux droites d'intersection ainsi construites, sera un point appartenant à l'intersection commune des deux plans donnés.

On déterminera un certain nombre de ces points; leur ensemble donnera la droite d'intersection des deux plans.

135. Problème IX. *Construire l'intersection de deux plans dont les traces de chacun sont en ligne droite.*

Solution. (Ep. 76.) On coupe les deux plans par une série de plans parallèles à P_1. Chacun de ces plans coupera chacun des deux plans donnés suivant une droite parallèle à P_1 (**127**). L'intersection de ces droites d'un même plan sécant donne un point de l'intersection commune des deux plans donnés.

Cette droite d'intersection se projette sur P_1 et sur P_2 suivant une droite perpendiculaire à l'axe.

Autre solution. Les deux plans, ayant leurs deux traces en ligne droite, sont deux plans perpendiculaires au plan bissecteur B_2. Les deux traces coïncidentes forment une **trace-double.**

Ces deux plans se rencontrent suivant une droite perpendiculaire à B_2, et cette droite a ses deux projections qui se confondent en une seule droite perpendiculaire à l'axe.

136. *La ligne de plus grande pente d'un plan par rapport à un autre plan, est une droite du premier plan normale à l'intersection des deux plans.*

La ligne de plus grande pente d'un plan R par rapport à P_1 est donc une droite d du plan R perpendiculaire à R_1. La première projection d' d'une telle droite est normale à R_1 (**49**).

On appelle cette ligne d ligne de plus grande pente du plan R par rapport à P_1, parceque c'est, de toutes les lignes de R, celle qui fait le plus grand angle avec P_1.

137. Problème X. *Construire les traces d'un plan, connaissant les projections de la ligne de plus grande pente de ce plan par rapport à* P_1.

Solution. Les traces du plan passeront par les traces de même nom de la droite, et la première trace sera normale à la première projection de la droite donnée.

138. Problème XI. *Même problème, les traces de la ligne de plus grande pente étant hors du cadre de l'épure.*

Solution. (Ep. 77.) Par un point a de la ligne de plus grande pente p, on mène une droite parallèle à la première trace du plan à construire. La première projection d' de cette droite sera normale à p', et la seconde projection sera parallèle à l'axe.

La seconde trace de cette droite est un point de la seconde trace du plan. On fait la même construction pour un deuxième point b de p. On aura un nouveau point de la seconde trace du plan, laquelle est par conséquent déterminée. Cette seconde trace rencontre l'axe en x, et la normale à p', menée par x, sera la première trace du plan demandé.

139. Problème XII. *Construire la droite d'intersection de deux plans dont on ne connaît que les lignes de plus grande pente par rapport à* P_1.

Solution. (Ep. 78.) On coupe les deux plans par des plans auxiliaires parallèles à P_1. Un tel plan coupera chacune des droites de plus grande pente en un point, et le plan correspondant à cette droite suivant une droite passant par ce point, parallèle à P_1 et à la première trace du plan, donc ayant sa première projection normale à la première projection de la ligne de plus grande pente.

Les deux droites obtenues par chacun des plans sécants se coupent en un point, qui appartient à la droite d'intersection des deux plans.

Vérifications. Tous les points ainsi obtenus sont en ligne droite.

140. Problème XIII. *Par un point donné, mener une droite qui rencontre deux autres droites données non situées dans un même plan.*

Solution. (Ep. 79.) Par le point et la première droite, on fait passer un plan (**112**). Par le même point donné et la seconde droite, on fait passer un plan. Ces deux plans se coupent suivant une droite passant par le point donné et rencontrant chacune des deux droites données, à moins de leur être parallèle. Cette droite se trouve, en effet, dans un même plan séparément avec chacune des deux droites données.

Pour la construction de l'intersection des deux plans, voir § 134.

Vérifications. 1° La droite ainsi obtenue passe par le point; les projections de cette droite passeront donc par les projections de même nom du point.

2° La droite rencontre chacune des deux droites ; les deux projections de ces points de rencontre se trouvent sur une normale à l'axe.

141. Problème XV. *Parallèlement à une droite donnée f, mener une droite qui s'appuie sur deux droites données d et c.*

Solution. (Ep. 80.) Par la droite *d*, on fait passer un plan parallèle à la droite *f* (**113**). Par la droite *c*, on fait de même passer un plan parallèle à *f*. Ces deux plans se rencontrent suivant une droite parallèle à *f* et rencontrant chacune des deux droites données *d* et *c*; cette droite est, en effet, avec chacune d'elles séparément dans un même plan.

La construction de cette droite d'intersection des deux plans auxiliaires se fait d'après le § 134.

Vérifications. 1° La droite obtenue est parallèle à la droite *f* (**50**).

2° Elle rencontre chacune des deux droites *d* et *c* (**140**).

142. Problème XVI. *Par un point donné, mener une droite parallèle à un plan donné et qui rencontre une autre droite donnée.*

Solution. (Ep. 81.) Par le point et la droite, on mène un plan (**112**). Ce plan coupe le plan proposé suivant une droite. Parallèlement à cette droite, on mène une droite par le point donné. Cette dernière droite est la droite demandée.

Elle est, en effet, parallèle au plan, puisqu'elle est parallèle à une droite de ce plan, et elle passe par le point.

143. Exercices. 1° Par la droite qui a pour projections les traces d'un plan donné, mener un plan perpendiculaire à ce plan, et déterminer l'intersection de ces deux plans.

2° Par une droite donnée, mener un plan perpendiculaire à un plan déterminé par l'axe de projection et un point. Construire l'intersection de ces deux plans.

3° Placer dans un plan donné une parallèle à P_1 ou à P_2, à une distance donnée de chacun de ces plans.

———

144. Troisième problème fondamental. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan quelconque.*

Solution. Par la droite donnée d, on mène un plan, dont on sait construire facilement la droite d'intersection e avec le plan donné. La droite d rencontrera e en un point qui est le point de rencontre de d avec le plan donné.

Remarque. Le problème général admet plusieurs cas particuliers.

145. Cas faciles. I. *Le plan donné est perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Dans ce cas, l'une des projections du point de rencontre se trouve à l'intersection de la trace-projection du plan avec la projection de même nom de la droite.

II. *Le plan donné est perpendiculaire à l'axe de projection.*

Le point de rencontre a ses deux projections à l'intersection des traces-projections du plan avec les projections de même nom de la droite.

III. *Le plan donné est parallèle à l'un des deux plans de projection.*

Ce cas particulier rentre dans celui du N° I. Le point de rencontre se trouve encore à l'intersection de la trace-projection du plan avec la projection de même nom de la droite.

—

Applications du troisième problème fondamental.

—

146. Problème I. *Construire la droite d'intersection d'un plan perpendiculaire à* P_1 *avec un plan représenté par deux droites qui se coupent, sans chercher les traces de ce plan.*

Solution. (Ep. 82.) Le plan T coupe la première droite d au point a, et la seconde droite c au point b (**145**, 1°). La droite qui unit a et b sera la droite d'intersection des deux plans. Cette droite se projette sur P_1 suivant la trace-projection T_1 du plan T.

147. Problème II. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan représenté par deux droites qui se coupent, sans chercher les traces de ce plan.*

Solution. (**Ep. 83.**) Par la droite donnée f, on fait passer un plan normal à P_1. On construit la droite d'intersection de ce plan avec le plan proposé (**146**); le point de rencontre m de cette droite ainsi construite avec la droite donnée f, sera le point où f perce le plan donné.

148. Problème III. *Par un point donné, mener une droite qui s'appuie sur deux droites données.*

Solution. Par le point et la première droite, on fait passer un plan. On construit le point de rencontre de ce plan avec la seconde droite (**147**). La droite qui passe par ce point et par le point donné sera la droite demandée.

149. Problème IV. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan déterminé par l'axe et par un point donné a.*

Solution. Par le point a et la droite, on fait passer un plan. Ce plan coupe le plan proposé suivant une droite; le point de rencontre de cette droite avec la droite donnée sera le point où cette dernière perce le plan proposé.

Solution graphique. (**Ep. 84.**) Par le point a, on mène une droite parallèle à la droite donnée ; elle déterminera avec celle-ci un plan auxiliaire R, dont on construira les deux traces R_2 et R_1. Le point a, appartenant au plan proposé et au plan R_1, sera un point de leur droite d'intersection. Le point m, point de rencontre des deux traces R_2 et R_1 avec l'axe, appartient également aux deux plans, puisque les traces du plan proposé se confondent avec l'axe. $a\,m$ est donc la droite d'intersection des deux plans. Cette droite rencontrera la droite donnée en b, point de rencontre de cette droite avec le plan proposé.

150. Problème V. *Point de rencontre d'une droite perpendiculaire à P_2 avec un plan déterminé par l'axe et par un point donné a.*

Solution. (**Ep. 85.**) Ce problème est un cas particulier du problème précédent.

151. Problème VI. *Point de rencontre d'une droite normale à P_2 avec un plan dont les deux traces sont en ligne droite.*

Solution. (**Ep. 86.**) Par la droite donnée, on fait passer un plan auxiliaire S, qui coupe le plan proposé suivant une droite.

Le point de rencontre a de cette droite d'intersection avec la droite donnée d, sera le point de rencontre de d avec le plan proposé R.

152. Problème VII. *Construire le point où trois plans se rencontrent.*

Solution. Soient les trois plans R, S et V. Les plans R et S se coupent suivant une droite d que l'on construit comme au § 126. Le point de rencontre de d avec le troisième plan V est le point qui appartient aux trois plans.

153. Problème VIII. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan représenté par sa ligne de plus grande pente p, sans construire les traces de ce plan.*

Solution. (**Ep. 87.**) Par la droite donnée d, on fait passer un plan R normal à P_1; on construit l'intersection de ce plan avec le plan proposé, et le point de rencontre de cette intersection avec la droite d sera le point où celle-ci perce le plan donné.

Pour obtenir la droite d'intersection du plan R avec le plan proposé, on coupe ces deux plans par une série de plans parallèles à P_1. Un tel plan H coupe le plan R suivant une droite f parallèle à P_1, et la ligne de plus grande pente p en un point a, par lequel passe la droite d'intersection du plan H avec le plan proposé. Or, cette droite est normale à p qui est parallèle à P_1; elle se projette par suite sur P_2 suivant une parallèle à l'axe, et sur P_1 suivant une normale à p' et passant par a'. Le point de rencontre i de cette ligne $i\,a$ avec la droite f donne un point i de la droite d'intersection du plan proposé avec ce plan R. Un deuxième plan K parallèle à P_1 donne un deuxième point l de cette droite; celle-ci est ainsi déterminée et coupe p au point z que l'on veut construire.

---

154. Quatrième problème fondamental. *Construire la véritable longueur d'une portion de droite limitée à deux de ses points.*

Solution dans l'espace. (**Fig. 89.**) La droite ab peut être considérée comme étant :

1° L'hypothénuse du triangle rectangle bam dont l'un des côtés de l'angle droit est égal à la première projection $a'b'$ de ab, et dont l'autre côté est égal à la différence des premières hauteurs ou des secondes ordonnées des points *a* et *b*. (**Ep. 89.**)

2° L'hypothénuse du triangle rectangle *anb* dont l'un des côtés de l'angle droit est égal à la seconde projection $a'' b''$ de *ab*, et dont l'autre côté est égal à la différence des premières ordonnées des points *a* et *b*. (**Ep. 90.**)

3° L'un des deux côtés non parallèles du trapèze rectangle $baa'b'$ dont l'autre côté est la première projection de *ab*, et dont les deux côtés parallèles sont les secondes ordonnées des points *a* et *b*. (**Ep. 91.**)

4° L'un des deux côtés non parallèles du trapèze rectangle $baa''b''$ dont l'autre côté est la seconde projection de *ab*, et dont les deux côtés parallèles sont les premières ordonnées des points *a* et *b*. (**Ep. 92.**)

Cas facile. Si la droite est parallèle à l'un des plans de projection, sa projection sur ce plan a même longueur que la droite.

155. Exercices. *Construire la vraie grandeur d'une droite limitée à deux de ses points :*

1° Lorsque les deux projections de la droite ce coupent sur l'axe.

2° Lorsque la droite est située dans le quatrième angle dièdre.

3° Lorsqu'elle est située en partie dans deux dièdres différents.

4° Lorsqu'elle est située dans un plan de profil, et qu'elle est connue par deux de ses points.

156. Problème réciproque. *Sur une droite donnée, et à partir d'un point donné, porter une longueur donnée.*

Solution. (**Ep. 93.**) Sur la droite, et à partir du point donné *a*, on prend un autre point *b*, et l'on construit, par un des quatre moyens connus, la véritable longueur *ab*. Sur cette longueur, on portera *ac* égale à la longueur donnée. Dans le trapèze rectangle $aa'c'c$, $a'c'$ sera la première projection de *ac* et c' la première projection par conséquent du point demandé ; la seconde projection c'' s'en déduira aisément.

Exercices. Sur une droite limitée, donnée par ses projections, trouver un point :

1° Egalement éloigné des extrémités ;

2° Au tiers de la ligne ;

3° Dont les distances aux deux extrémités soient dans un rapport donné.

Applications du quatrième problème fondamental.

157. Problème I. *Construire la distance d'un point à un plan.*

Solution dans l'espace. Du point donné a, on abaisse une perpendiculaire sur le plan donné. On construit le point de rencontre i du plan avec cette perpendiculaire ; la vraie longueur ai mesure la distance du point a au plan.

Solution graphique. (Ep. 94.) Les projections de la perpendiculaire passeront par les projections de même nom du point, et seront perpendiculaires aux traces de même nom du plan.

Le point de rencontre i de la perpendiculaire avec le plan se construit, en menant, par cette droite, un plan auxiliaire normal à P_1. La véritable longueur ai de la distance du point au plan a été obtenue à l'aide du triangle rectangle ayant $a'i'$ pour côté de l'angle droit (**154**-1°).

158. Exercices et cas particuliers. *Construire la distance d'un point à un plan :*

1° Le plan est normal à P_1 ou à P_2 ;

2° Le plan est parallèle à l'axe de projection ;

3° Le plan est déterminé par l'axe et par un point ;

4° Le plan est perpendiculaire au plan bissecteur B_2 ; ses deux traces sont en ligne droite.

159. Problème II. *On donne la première trace d'un plan perpendiculaire à* P_2, *un point de l'espace, et la distance de ce point au plan : construire la seconde trace de ce plan.*

Solution. (Ep. 95.) La distance du point a au plan S se projette sur P_2 suivant une normale à S_2 et suivant sa vraie longueur. Il suffira donc de décrire, de a'' comme centre, avec la distance du point au plan pour rayon, une circonférence de cercle, et de mener par x une tangente à cette circonférence, pour avoir la trace S_2 du plan.

Remarque. Le problème admet deux solutions, une seule solution, ou devient impossible, suivant que la distance donnée du point au plan est plus petite que $a''x$, égale à cette ligne, ou plus grande que cette dernière.

Si la distance donnée est égale à la seconde ordonnée du point a, une des solutions se confondra avec le plan P_1.

160. Problème III. *Par un point donné, mener un plan qui passe à égale distance de deux points donnés.*

Solution dans l'espace. On joint, par une droite d, le point au milieu de la droite e qui unit les deux points donnés.

Tout plan qui contient d est à égale distance des extrémités de e, donc des deux points donnés. (A démontrer.)

Faire l'épure pour un plan normal à P_1 ou à P_2.

161. Problème IV. *Par un point donné a, mener un plan qui passe à égale distance de trois points donnés.*

Solution dans l'espace. Les trois points déterminent un plan T.

Le plan mené par le point a parallèlement à T sera le plan demandé. Il est, en effet, à égale distance de tous les points de T, donc également de chacun des trois points donnés.

162. Problème V. *Par trois points donnés, mener trois plans parallèles et équidistants.*

Solution dans l'espace. On joint le point a au milieu m de la droite qui unit b et c. Par am, on mène un plan T. Les deux plans menés par b et c parallèlement à T sont à égale distance de ce plan. (A démontrer.)

Faire l'épure pour le cas de trois plans normaux à P_1.

163. Problème VI. *Par deux points et une droite, faire passer trois plans parallèles équidistants.*

Solution dans l'espace. On unit les deux points a et b par une droite; le milieu m de ab et la droite donnée d déterminent un plan T également distant de a et de b. Les deux plans parallèles à T menés par a et par b constituent avec T les trois plans demandés.

164. Problème VII. *Construire la distance de deux plans parallèles.*

Solution dans l'espace. D'un point quelconque de l'espace, on abaisse une perpendiculaire sur l'un des deux plans; cette droite sera perpendiculaire sur l'autre plan, et perce les deux plans en deux points, dont la distance mesure celle des plans.

Solution graphique. (Ep. 96.) Au lieu de prendre un point quelconque de l'espace pour mener la perpendiculaire aux deux plans, on simplifiera beaucoup l'épure, en prenant, pour ce point, le point de rencontre x des deux traces du plan S. Le problème est ainsi ramené à construire la distance du point x au plan T (**156**). La distance ax sera l'hypothénuse du triangle qui a $a''x$ pour premier côté de l'angle droit, et la différence des premières ordonnées de a' et x, ou la longueur am, pour second côté de cet angle (**154-2°**).

165. Problème VIII. *Mener un plan parallèle à un plan donné et distant de ce plan d'une longueur donnée.*

Solution dans l'espace. Par un point du plan, on mène une normale à ce dernier, et l'on porte sur cette droite, et à partir du point, une longueur égale à la longueur donnée (**156**). Par l'extrémité de cette longueur, on mènera un plan parallèle au plan proposé (**116**).

166. Problème IX. *Trouver, sur l'axe de projection, un point distant d'un plan donné d'une longueur donnée.*

Solution dans l'espace. On construira un plan parallèle au plan proposé et distant de celui-ci de la longueur donnée (**165**). Le point de rencontre de ce plan avec l'axe sera le point demandé.

167. Problème X. *Construire la distance de deux droites parallèles.*

Solution dans l'espace. On coupe les deux droites par un plan auxiliaire qui leur est perpendiculaire. La droite qui unit les deux points d'intersection a et b des deux droites avec ce plan, est une perpendiculaire commune aux deux droites, et en mesure la distance.

Solution graphique. (Ep 97.) Le plan auxiliaire perpendiculaire aux deux droites a ses traces perpendiculaires aux projections de même nom des deux droites. La véritable longueur ab sera, dans cette épure, l'un des côtés non parallèles du trapèze rectangle dont l'autre côté est la première projection $a'b'$ de ab (**154-3°**).

168. Problème XI. *Construire la distance d'un point à une droite.*

Solution dans l'espace. Par le point donné, on mène un plan perpendiculaire à la droite donnée. On construit le point de rencontre de ce plan avec la droite, et la droite qui unit ce point au point donné sera la distance du point à la droite, vu que c'est une droite du plan perpendiculaire à la droite donnée et passant par le pied de celle-ci ainsi que par le point donné.

Solution graphique. (**Ep. 98.**) Le plan a ses traces perpendiculaires aux projections de même nom de la droite donnée. Ces traces s'obtiennent comme au § 118. La véritable longueur *ab* a été construite comme au § 154-4.

169. Exercices. I. Construire la distance d'un point donné :

1° A l'axe ;

2° A une parallèle à l'axe ;

3° A une droite située dans P_2 ;

4° A une droite parallèle à P_1 ou à P_2.

II. Construire la distance d'un point de l'axe à une droite quelconque.

170. Problème XII. *Construire la plus courte distance entre deux droites qui se croisent dans l'espace.*

Solution dans l'espace. (**Fig. 99.**) Par un point *a* de la première droite *e*, on fait passer une droite *ah* parallèle à la deuxième droite *d*; *ah* et *e* détermineront un plan T parallèle à *d*. Par un point *b* de la droite *d*, on abaisse une perpendiculaire sur le plan T ; on en détermine le pied *c*, point par lequel on mène *cf* parallèle à *d*. La droite *cf* sera dans le plan T et rencontrera *e* en *f*; la droite *gf*, menée par *f* parallèlement à *bc*, sera la plus courte distance des deux droites *d* et *e*. (Pour la démonstration, voir Legendre, livre V.)

Solution graphique. (**Ep. 100.**) La solution graphique indiquée dans la solution dans l'espace se fait à l'aide des problèmes des paragraphes (**58**), (**144**) et (**154**). La véritable longueur de *fg* sera l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont l'un des côtés de l'angle droit est la première projection *f'g'* de *fg*, etc. (**153—1°.**)

Autre solution. La droite d'intersection de deux plans R et S respectivement perpendiculaires aux droites *d* et *e*, est parallèle à leur plus courte distance. On déterminera une extrémité de cette plus courte distance, en cherchant le point de rencontre de la droite avec un plan mené par *e* parallèlement à l'intersection des plans R et S.

Cas particuliers. Le problème se simplifie pour les deux cas particuliers suivants :

1er Cas. *Une des deux droites est perpendiculaire à l'un des plans de projection.* (**Ep. 101** .)

La droite *d* étant normale à P_1, la plus courte distance des deux droites sera parallèle à P_1 et se projettera sur ce plan suivant sa véritable grandeur en $a'g'$, perpendiculaire à e' (**49**).

2d Cas. *Les deux droites sont parallèles à l'un des plans de projection.* (**Ep. 102.**)

Les deux droites *d* et *e* étant parallèles à P_1, leur plus courte distance sera normale à P_1 et se projette sur P_1 suivant un point, le point de rencontre de e' et d', et sur P_2 suivant sa véritable longueur $a''b''$, normale commune à d'' et à e''.

171. Problème XIII. *Construire l'angle de deux droites.*

Solution dans l'espace. Sur chacune des deux droites données, on prend un point. On unit ces deux points *b* et *c* par une droite, et l'on construit la véritable longueur de *bc*, ainsi que celles des distances *ba* et *ca* des points *b* et *c* au point de rencontre *a* des deux droites données. Sur le plan de figure, on construira un triangle ayant les trois longueurs *ba, ca* et *bc* pour côtés. L'angle opposé au côté *bc* sera égal à l'angle des deux droites.

Solution graphique. (Ep. 103.) La solution graphique se réduit à la construction de la véritable longueur de trois droites.

Remarque. En prenant les points *b* et *c* à égale hauteur au dessus du plan P_1, la longueur *bc* sera parallèle à P_1 et s'y projette suivant sa véritable longueur.

172. Problème XIV. *Construire l'angle des deux traces d'un plan.*

Solution dans l'espace. Sur la trace T_2 du plan T, on prend un point *b* que l'on unit, par une droite, au point *a* pris sur T_1. Si *m* est le point de rencontre de T_1 et T_2 sur l'axe, le triangle *mab* aura en *m* un angle opposé à *ba* qui est l'angle demandé.

Solution graphique. (Ep. 104.) Deux des côtés du triangle *mab* se trouvent en véritable longueur dans les données de l'épure. Ce sont les deux segments mb'' et ma' interceptés par *ab* sur les deux traces du plan. Le troisième côté *ab* sera l'hypothénuse du triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit $a'b'$ et $b'b''$.

173. Problème XV. *Construire l'angle d'une droite et d'un plan.*

Solution dans l'espace. D'un point pris sur la droite, on abaisse une perpendiculaire sur le plan. L'angle que fait la droite avec cette perpendiculaire est le complément de l'angle que fait la droite avec le plan.

Solution graphique. (Ep. 105.) L'angle de la droite et de la normale au plan se construit comme au § 171.

174. Problème XVI. *Construire l'angle de deux plans.*

Solution dans l'espace. D'un point quelconque situé dans le dièdre des deux plans, on abaisse une perpendiculaire sur chacun des deux plans donnés. L'angle de ces deux droites sera le supplément de l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans.

Solution graphique. (E. 106.) L'angle des deux perpendiculaires se construit comme au § 171.

175. Problème XVII. *Construire l'angle d'un plan avec les deux plans de projection.*

Solution dans l'espace. (Fig. 107.)

Angle du plan avec P_1. Par un point *m* de l'axe, on mène un plan perpendiculaire à la trace T_1 du plan T. Ce plan coupe P_2 suivant *mb* perpendiculaire à l'axe, et P_1 suivant *ma* perpendiculaire à T_1. Dans le triangle *bma*, l'angle *a* est le correspondant du dièdre formé par P_1 et T.

Angle du plan T avec P_2. Du même point *m* de l'axe, on mène un plan auxiliaire perpendiculaire à T_2 ; il coupera P_2 suivant *cm* perpendiculaire à T_2, et P_1 suivant *md* perpendiculaire à l'axe. L'angle *c* du triangle rectangle *cmd* sera le correspondant du dièdre formé par T et P_2.

Solution graphique. (Ep. 108.) Les opérations graphiques se réduisent à la construction des deux triangles rectangles *cmd* et *bma* ; on construira les véritables longueurs des deux côtés de l'angle droit.

176. Problème XVIII. *Construire l'intersection de trois plans p, q et r.*

Solution. On construit l'intersection des deux plans p et q. On obtient une droite, dont on construira le point de rencontre s avec le plan r; ce point s appartient au plan r ainsi qu'à chacun des deux autres plans p et q, puisqu'il est situé sur leur droite d'intersection.

177. Problème XIX. *Par une droite donnée d, mener un plan qui fasse, avec P_1, le plus petit angle possible.*

Solution. (Ep. 109.) Le plan mené suivant d et qui a cette droite pour ligne de plus grande pente, est celui qui répond aux conditions du problème ; sa trace sur P_1 sera perpendiculaire à d', et son angle avec P_1 est égal à l'angle de la droite d avec P_1.

En effet, par d faisons passer deux nouveaux plans dont les traces q_1 et r_1, menées à droite et à gauche de d', ne sont pas perpendiculaires à d', et prouvons que les angles de ces plans avec P_1 sont plus grands que l'angle de d avec P_1.

L'angle du plan r avec P_1 est l'angle m du triangle rectangle $a''a'm$ (**175**).

L'angle du plan q avec P_1 est l'angle n du triangle rectangle $a''a'n$.

Si l'on compare ces deux triangles rectangles au triangle rectangle qui, dans l'espace, a $a''a'$ et $a'x$ pour côtés de l'angle droit, on voit que l'angle aigu x opposé à $a''a'$ est plus petit que chacun des angles m et n. Donc, le plan qui passe par d et qui a cette ligne pour ligne de plus grande pente, est celui qui fait le plus petit angle avec P_1.

Chapitre VII.

Méthode des rabattements.

178. Considérations générales. — But des rabattements. — Définitions. Une figure plane est située dans un plan quelconque de l'espace, et doit servir de base à des opérations à exécuter dans ce plan. Cette figure, ainsi que les constructions graphiques à faire, se trouveront déformées dans leurs projections sur P_1 et P_2, et la solution graphique du problème peut présenter des difficultés telles que l'on doit renoncer à toute opération.

Si l'on fait tourner le plan, avec la figure qu'il contient, autour de l'une de ses traces, ou autour d'une de ses droites parallèle à cette trace, jusqu'à ce qu'il soit couché sur le plan de projection de même nom que cette trace, ou sur un plan parallèle à ce dernier, la figure se trouvera convenablement placée pour permettre l'exécution des opérations graphiques nécessaires pour arriver au résultat.

Le résultat ainsi obtenu, on fait retourner le plan de la figure, avec celle-ci, le résultat, ainsi que les constructions exécutées, dans la position primitive du plan, et le résultat du problème se trouvera déterminé et fixé dans l'espace.

Cette manière d'opérer, de faire tourner un plan d'une figure et de le coucher sur un plan de projection ou dans une position parallèle à celui-ci, s'appelle **rabattre le plan de la figure**. On aura opéré **un rabattement**.

Le résultat du problème a été obtenu par **un rabattement.**

Le plan est rabattu autour d'une trace ou bien autour d'une de ses droites parallèle à cette trace. Ces droites autour desquelles se fait le rabattement sont **les axes de rabattement**, **les charnières**, **les axes de rotation**, ou simplement, **les axes.**

La position qu'occupe après l'opération du rabattement un point, une ligne, une figure, constitue **le rabattement de ce point, de cette ligne, de cette figure.** Le plan sur lequel la figure a été rabattue est **le plan du rabattement.**

L'opération de redresser le plan rabattu et de le faire revenir dans sa position primitive, se nomme **relèvement.**

Relever le rabattement d'un point, d'une figure, c'est passer du rabattement de ces éléments à leurs positions primitives, ou à celles qu'ils doivent occuper dans le plan qui les contient, et avec celui-ci dans l'espace.

179. Principes pour rabattre un point et une droite.

Rabattement du point. Pour rabattre un point *a* situé dans un plan quelconque (perpendiculaire à P_1, à P_2, à l'axe, ou oblique à P_1 et à P_2) autour de l'une des deux traces de ce plan, on fera tourner ce dernier autour de cette trace, jusqu'à ce qu'il soit couché, avec tout ce qu'il contient, sur le plan de projection qui a même nom que la trace qui a servi d'axe de rotation.

1° Dans ce mouvement de rotation, le point *a* décrira un arc de cercle, dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation, et, par suite, au plan de projection (plan du rabattement) qui contient cet axe.

2° Le rabattement et la projection du point *a* sur le plan du rabattement se trouvent sur la trace-projection du plan de rotation, laquelle trace est perpendiculaire à l'axe de rotation (**62**).

3° La distance du point *a* à l'axe ne change pas pendant le mouvement de rotation de ce point.

De ce qui précède, il suit :

1° *Que le rabattement du point a sur l'un des plans de projection est lié à la projection du point sur ce plan par une perpendiculaire à l'axe de rotation ;*

II° *Que la distance du rabattement à l'axe de rotation est égale à la distance du point a non rabattu à cette même ligne ;*

III° *Que la distance du rabattement à un point quelconque x de l'axe de rotation est égale à la distance du point non rabattu à ce même point x.*

Rabattement de la droite. 1° Chacun des points de la droite se meut d'après les principes précédents, et le point de rencontre de la droite avec l'axe de rotation reste fixe. Ce point appartient donc au rabattement de la droite et à la projection de celle-ci sur le plan du rabattement.

2° L'angle que la droite fait avec l'axe de rotation est le même que celui que le rabattement de la droite fait avec ce même axe.

Il suit de là :

Que pour avoir le rabattement d'une droite, il suffira de construire le rabattement d'un point de cette droite, et d'unir ce point rabattu au point de rencontre de la droite avec l'axe de rotation.

180. Remarque. Les propriétés et principes qui précèdent s'appliquent également aux cas particuliers où l'axe de rotation est une parallèle à l'une des traces du plan. Le mouvement de rotation s'arrête, en effet, dès que le plan mobile est parallèle au plan de projection de même nom que la trace à laquelle l'axe est parallèle. Ce plan mobile, dans cette position, peut être considéré comme plan de projection, ou bien le plan de projection peut être considéré comme soulevé parallèlement à lui-même, jusqu'à ce qu'il coïncide avec le plan du rabattement.

181. Toute solution par rabattement se base sur les deux problèmes fondamentaux suivants :

I. *Construire le rabattement d'un point ou d'une droite situés dans un plan quelconque* T.

II. **Réciproquement.** *Etant donné le rabattement d'un point ou d'une droite situés dans un plan* T, *relever ce point ou cette droite.*

Ces problèmes comprennent réellement six problèmes différents avec leurs réciproques, suivant qu'il s'agit du point ou de la droite, et que le plan T est normal à P_1 ou à P_2, ou quelconque.

Chacun de ces six problèmes et la réciproque de chacun d'eux admettent quatre cas particuliers suivant l'axe de rotation que l'on adopte.

Plan d'études. Nous devons donc suivre, dans l'étude des rabattements, le plan qui nous est tracé par le tableau suivant :

Construire le rabattement d'un point situé dans	un plan T	I. normal à P_1	. . . .	I.	et réciproquement.
			. . . .	II.	
		II. normal à P_2	Problème fondamental	III.	
				IV.	
d'une droite située dans		III. quelconque	. . . .	V.	
			. . . .	VI.	

Chacun de ces six problèmes ainsi que la réciproque de chacun d'eux admettent quatre cas particuliers	suivant que l'axe de rotation est	la trace....	T_1	cas particuliers	I.
			T_2		II.
		une parallèle à la trace	T_1		III.
			T_2		IV.

182. Premier problème fondamental. *Construire le rabattement d'un point situé dans un plan* T *normal à* P_1.

I. **La trace T_1 étant prise pour axe de rotation.**

Solution graphique. (Ep. 110.) Le rabattement (a) sur P_1 du point a est uni à la projection de a sur P_1 par une normale à l'axe de rabattement (**179.** I°). La distance de (a) à l'axe de rotation est égale à $a''m$, véritable longueur de la distance du point a à l'axe T_1 (**179.** II).

II. **La trace T_2 étant prise pour axe de rotation.**

Solution graphique. (Ep. 111.) Le rabattement (a) sur P_2 du point a est uni à la projection a'' de ce point sur ce plan par une normale à l'axe de rabattement T_2 (**179.** I). La distance $(a)m$ qui sépare (a) de l'axe T_2 est égale à xa', véritable longueur de la distance du point a à l'axe T_2. (**179.** II.)

Notations. Dans les épures, nous marquerons les rabattements des points *a, b, c,* etc. ou des droites *d, f,* etc. par les lettres qui désignent ces points et ces droites dans l'espace, et nous les placerons entre parenthèses.

(a), (b), (c), etc. sont donc les rabattements des points *a, b, c,* etc.

(d), (f), ou (R), etc. » » » » des droites *d, f,* R, etc.

Cette manière d'annoter les rabattements évite l'emploi de nouvelles lettres ou d'indications non conventionnelles qui ne peuvent manquer de rendre une épure peu lisible.

Les notations (a), (b) etc. seront maintenues pour les rabattements, quelle que soit la méthode de projection (orthogonales, obliques, axonométriques ou centrales) dans laquelle on opère.

III. **Une droite *d* du plan T parallèle à la trace T_1 est prise pour axe de rotation.**

Solution dans l'espace. Le plan T tournera autour de la droite *d* jusqu'à ce qu'il soit parallèle à P_1. Si, dans cette position, on prend ce plan pour plan de projection P'_1, les principes du § **179** s'appliqueront au rabattement et à la projection du point sur ce nouveau plan de projection. Comme P'_1 est parallèle à P_1 et que toute figure de ce plan se projette sur P_1 suivant une figure égale, les relations entre le rabattement et la projection du point sur P'_1 n'auront pas changé quand ces éléments sont projetés sur P_1.

Solution graphique. (**Ep. 112.**) D'après ce qui précède, nous voyons que le rabattement (a) projeté sur P_1 est uni à la projection a' du point a par une normale à d', projection de l'axe de rotation sur P_1. La distance $(a)a'$ sera égale à la distance $a''m$, véritable longueur de la distance du point a à l'axe de rotation d.

IV. **Une droite *e* du plan T parallèle à T_2 est prise pour axe de rotation.**

Solution graphique (**Ep. 113.**) En raisonnant comme pour le cas précédent, on voit que le rabattement (a), projeté sur P_2, est uni à la projection a'' du point a sur P_2 par une normale à e''_2, projection de l'axe de rotation sur P_2. La distance de (a) à e'' est égale à $a'e'$, véritable longueur de la distance du point a à l'axe e.

Remarques. I. Dans les quatre cas particuliers précédents, le rabattement peut se faire à droite ou à gauche de l'axe de rotation.

II. En comparant entre elles les solutions graphiques des quatre cas particuliers du problème précédent, nous pouvons déduire de cette comparaison la règle pratique suivante :

Règle pratique. *Un point étant situé dans un plan normal à* P_1, *pour construire le rabattement de ce point, soit sur* P_1, P_2, *ou sur un plan parallèle à* P_1 *ou à* P_2, *de la projection du point sur le plan du rabattement, on abaisse une normale sur la projection, sur ce même plan, de l'axe de rotation, et l'on porte sur cette normale, et à partir de l'axe projeté, une longueur égale à la distance de l'autre projection du point à la projection de même nom de l'axe de rotation.*

183. Problème réciproque. *Le rabattement d'un point* *étant donné, relever ce point, sachant qu'il doit être situé dans un plan* T *normal à* P_1.

I. La trace-projection T_1 étant l'axe de rotation.

Solution graphique (Ep. 110.) La projection a' du point sur P_1 sera située sur une perpendiculaire abaissée du rabattement (a) sur l'axe de rotation T_1 (**179-1**). Comme le point a est dans le plan T qui est normal à P_1, la projection a' sera sur T_1, donc en a', point de rencontre de la perpendiculaire $(a)a'$ avec T_1.

La seconde projection a'' du point est située au-dessus de l'axe de projection à une distance $a''m$ égale à $a'(a)$, $a''m$ mesurant la distance du point a du plan T à l'axe de rotation T_1, trace-projection de ce plan.

II. La trace T_2 étant l'axe de rotation.

Solution graphique. (Ep. 111.) La seconde projection a'' se trouvera sur la perpendiculaire abaissée de (a) sur l'axe de rotation T_2. La première projection a' doit être sur la trace-projection du plan. Comme le point a de l'espace doit être écarté de T_2 d'une longueur égale à $m(a)$, et que cet écartement se projette en vraie grandeur sur T_1, vu que T est normal à P_1, on n'a qu'à porter $m(a) = xr$ sur T_1 de x en a', et a' sera la première projection du point a. La seconde projection sera en a''.

III. Une droite *d* du plan T parallèle à la trace-projection T_1 étant l'axe de rotation.

Solution graphique. (Ep. 112.) La première projection du point a se trouve en a', pied de la perpendiculaire abaissée du rabattement (a) sur l'axe de rotation projeté en d' (**180**). La seconde projection a'' du même point a se trouve sur la perpendiculaire $a''a'$ à l'axe de projection, et à une distance $a''m = (a)a'$ au-dessus de la seconde projection d'' de l'axe de rotation; $a''m$ mesure, en effet, la distance de a à l'axe d, distance qui doit être égale à $a'(a)$.

IV. Une droite *e* du plan T parallèle à T_2 étant l'axe de rotation.

Solution graphique. (Ep. 113.) La seconde projection du point a se trouvera sur la perpendiculaire abaissée du rabattement (a) sur l'axe de rotation.

La première projection a' sera sur T_1, à une distance $e'a' = n(a)$ de e'; $e'a'$ mesure, en effet, la distance du point a du plan T à la droite e de ce plan, cette droite étant parallèle à P_2. On portera donc $n(a) = mr = e's$ de e en a', et a' sera la première projection du point a. La seconde projection sera en a''.

184. Deuxième problème fondamental. *Construire le rabattement d'une droite située dans un plan normal à* P_1.

Ce problème, ainsi que sa réciproque, admettent, comme le premier problème fondamental et sa réciproque, quatre cas particuliers suivant l'axe de rotation que l'on adopte.

Cet axe sera l'une des traces du plan ou une droite de ce plan parallèle à l'un des deux plans de projection.

Solution. On construira le rabattement d'un point quelconque de la droite (**179** et **180**). Le point de rencontre de la droite avec l'axe de rotation sera le rabattement d'un deuxième point de la droite.

185. Problème réciproque. Pour relever une droite située dans un plan perpendiculaire à P_1, son rabattement étant donné, on relève un point de cette droite (**183**). Le point de rencontre du rabattement de la droite avec l'axe de rotation sera un deuxième point de la droite demandée.

186. Troisième problème fondamental. *Construire le rabattement d'un point situé dans un plan normal à* P_2 (**190**).

187. Problème réciproque. *Le rabattement d'un point étant donné, relever ce point, sachant qu'il doit être situé dans un plan normal à* P_2 (**190**).

188. Quatrième problème fondamental. *Construire le rabattement d'une droite située dans un plan normal à* P_2 (**190**).

189. Problème réciproque. *Le rabattement d'une droite étant donné, relever cette droite, sachant qu'elle doit être située dans un plan normal à* P_2 (**190**).

190. Remarque. Les problèmes des §§ 186 à 189 admettent chacun quatre cas particuliers suivant l'axe de rotation que l'on adopte. Cet axe est une des deux traces du plan à rabattre ou une droite de ce plan parallèle à l'un des plans de projection.

Les raisonnements et les solutions donnés pour les deux premiers problèmes fondamentaux s'appliquent aux problèmes III et IV. Il en est de même de la règle pratique tirée des solutions des deux premiers problèmes.

Nous nous dispenserons donc d'entrer dans tous les détails que comportent les solutions des deux derniers problèmes fondamentaux, et nous proposons ces problèmes, avec leurs cas particuliers et les réciproques, comme exercices des §§ 182, 183 et 184.

191. Cinquième problème fondamental. *Construire le rabattement d'un point situé dans un plan quelconque.*

I. La trace sur P_1 est prise pour axe de rotation.

Première solution. (Ep. 114.) Le point a se meut dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, la trace T_1 du plan T. Le rabattement (a) se trouvera donc sur la perpendiculaire abaissée de a' sur l'axe de rotation (**179**). La distance $b'(a)$ qui, sur cette perpendiculaire, sépare le rabattement (a) de l'axe T_1 est égale à la distance qui, dans le plan T, sépare le point a de la trace T_1. Cette distance se projette sur P_1 en $a'b'$ (**49**) et sur P_2 en $a''b''$ et, comme elle est située dans le plan T et dans le plan de rotation, lequel est normal à P_1, elle sera situee sur l'intersection de ces deux plans, et peut se construire par un rabattement auxiliaire du plan de rotation autour de sa trace-projection prise pour axe (**182-I**). Le point a se rabat alors en (a) sur $b'(c)$ et le point b' reste fixe.

La distance $b'(a)$ portée à partir de b' sur le prolongement de $a'b'$, déterminera le point (a), rabattement du point a autour de T_1.

Remarque. La longueur $b'(a)$ est l'hypothénuse du triangle rectangle $b'a'(a)$, qui a pour côtés de l'angle droit les distances des projections a' et a'' du point donné aux projections de même nom (T_1 et l'axe de projection) de l'axe de rotation T_1.

Autre solution. (Ep. 114.) On sait (**179-III.**) que la distance du point à rabattre à un point quelconque de l'axe de rotation ne change pas pendant le mouvement de rotation. Supposons le point a uni au point m' de l'axe de rotation par une droite parallèle à P_2. Cette ligne se projette suivant sa véritable longueur sur P_2 en $m''a''$ parallèle à T_2.

Le rabattement (a) devant se trouver sur la perpendiculaire abaissée de a' sur l'axe de rotation, et être éloigné de m' d'une longueur égale à $m''a''$, se trouvera en (a), à l'intersection de cette perpendiculaire avec l'arc de cercle décrit de m' comme centre avec $m''a''$ pour rayon.

II. La trace sur P_2 est prise pour axe de rotation.

Première solution. (**Ep. 115.**) Un raisonnement analogue à celui qui a donné la première solution du cas précédent nous montre que, pour avoir le rabattement (a) du point a sur P_2, il faut abaisser de a'' une perpendiculaire sur l'axe T_2, et porter sur cette ligne une longueur $b''(a)$ qui est la véritable longueur de la distance du point a à l'axe T_2. Cette longueur peut se construire par un rabattement auxiliaire du plan de rotation sur P_2 (**182-II**).

Remarque. La longueur $b''(a)$ est l'hypothénuse d'un triangle rectangle $b''(a)a''$, dont les côtés de l'angle droit sont les distances des projections a' et a'' du point a aux projections de même nom de l'axe de rotation.

Seconde solution. (**Ep. 115.**) On unira le point a à un point m'' de T_2, de manière que la ligne am'' soit parallèle à P_1 et, par suite, à T_1 ; elle se projettera sur P_1 suivant sa véritable longueur en $m'a'$.

Décrivons donc, de m'' comme centre avec $m'a'$ pour rayon, un arc de cercle qui coupera en (a) la perpendiculaire abaissée de a'' sur l'axe de rotation ; (a) sera le rabattement du point a (**179-III**).

III. Une droite d du plan parallèle à P_1 est prise pour axe de rotation.

Première solution. (**Ep. 116.**) Le mouvement de rotation du plan S autour de d s'arrête dès que ce plan est devenu parallèle à P_1. La projection sur P_1 du rabattement (a) se trouvera reliée à a' par une perpendiculaire à d', projection de l'axe de rotation sur P_1, et la distance $(a)x$ qui sépare (a) de d' sera égale à la véritable longueur de la distance du point a du plan à la droite d. Cette distance se trouvant dans un plan perpendiculaire à d et, par suite, à P_1, peut se construire par un rabattement auxiliaire de ce plan sur P_1 autour de sa trace-projection prise pour axe de rotation. La distance $(a)(b)$ ainsi obtenue sur $n'(e)$, portée de x en (a), donne, en ce point, le rabattement du point a.

Remarque. $(a)(b)$ est l'hypothénuse d'un triangle rectangle $(b)r(a)$, dont les deux côtés de l'angle droit sont les distances des projections a' et a'' du point a aux projections de même nom d' et d'' de l'axe de rotation.

Seconde solution. (Ep. 116.) On unira le point a à un point c de l'axe de manière que ac soit parallèle à P_2. $c''a''$ sera la vraie longueur qui sépare a de c. Le rabattement (a) se trouvera donc sur l'arc de cercle décrit de c' comme centre avec $a''c''$ pour rayon. L'intersection de cet arc avec la perpendiculaire $x(a)$ donne le rabattement demandé.

IV. Une droite *d* du plan parallèle à P_2 est prise pour axe de rotation.

Première solution. (Ep. 117.) En raisonnant comme pour le troisième cas, on voit que l'on obtient le rabattement (a) du point a sur P_2 en abaissant de a'' une normale sur d'', et en prenant, sur cette normale, une longueur $m''(a)$ égale à la vraie distance du point a à l'axe de rotation d.

Cette distance $(a)m'' = (a)(m)$ peut se construire à l'aide d'un rabattement auxiliaire.

Remarque. $(m)(a)$ est encore l'hypothénuse d'un triangle rectangle $(m)r(a)$, dont les deux côtés de l'angle droit sont les distances des projections a' et a'' du point a aux projections de même nom d' et d'' de l'axe de rotation d.

Seconde solution. (Ep. 117.) On unira le point a à un autre point b de l'axe d de manière que ab soit parallèle à P_1, et s'y projette en $a'b'$ suivant sa véritable longueur, etc.

Remarques. I. Dans les quatre cas particuliers du problème, le rabattement peut s'effectuer à droite ou à gauche de l'axe de rotation.

II. En comparant entre elles les solutions graphiques données pour les quatre cas particuliers, nous pouvons poser la règle pratique suivante :

Règle pratique. *Un point étant situé dans un plan quelconque,* *pour construire le rabattement de ce point sur* P_1, *sur* P_2, *ou sur un plan parallèle à* P_1 *ou à* P_2, *de la projection du point sur le plan du rabattement, on abaisse une perpendiculaire sur la projection, sur ce même plan, de l'axe de rotation. Sur cette perpendiculaire, et à partir de l'axe projeté, on portera une longueur égale à l'hypothénuse du triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont les distances des deux projections du point à rabattre aux projections de même nom de l'axe de rotation. L'extrémité de cette perpendiculaire sera le rabattement du point donné.*

192. Problème réciproque. *Le rabattement d'un point étant donné, relever ce point, sachant qu'il doit se trouver dans un plan donné.*

I. La première trace de ce plan étant prise pour axe de rotation.

Solution. (Ep. 114.) Pour relever le point (a) on devra lui faire décrire le chemin qu'il a dû parcourir dans son rabattement, c'est-à-dire, un arc de cercle dont le plan est perpendiculaire à T_1 et dont le rayon est $b'(a)$. Le point demandé sera donc situé, 1° dans le plan donné, 2° dans le plan perpendiculaire à T_1 et, par suite, à P_1, et dont la trace-projection passe par (a). C'est donc sur l'intersection bc de ces deux plans que nous devons retrouver le point a, et sur cette droite, ce point doit être écarté de b' d'une longueur égale à $b'(a)$. Rabattons bc en $b(c)$, (**182.-I.**) et portons $b'(a)$ de b' sur $b(c)$; nous aurons en (a) sur $b'(c)$ le rabattement du point demandé autour de $b'c'$ prise pour axe.

Les projections a' et a'' du point se trouveront ensuite par le raisonnement du § (**181-I**).

II. La seconde trace de ce plan étant prise pour axe de rotation.

Solution. (Ep. 115.) Même raisonnement comme pour le cas précédent. Le point se trouvera sur bc, intersection du plan T avec le plan perpendiculaire à T_2 dont la trace-projection, normale à T_2, passe par (a).

La distance du point demandé au point b'' sur bc est égale à $(a)b''$. On rabattra le plan auxiliaire sur P_2 en prenant sa trace-projection $b''c''$ pour axe de rotation (**186**). Le point (a) de $b''(c)$, distant de b'' d'une longueur égale à $(a)b''$ donnée par le premier rabattement, sera un nouveau rabattement du point demandé, point dont on construit les projections (**186**).

III. Une droite d du plan parallèle à P_1 étant prise pour axe de rotation.

Solution. (**Ep. 116**). D'après les raisonnements précédents, le point se trouvera sur la droite d'intersection du plan donné avec le plan perpendiculaire à l'axe d et passant par (a). Cette droite nc rencontre l'axe d au point b, et le point demandé sera situé sur nc et à une distance de b égale à $(a)b'$. Comme nc, ainsi que le point b, se trouvent dans un plan perpendiculaire à P_1, on rabattra ces éléments sur P_1 autour de la trace-projection $n'c'$ prise pour axe (**182-I**). Sur $n(e)$, et à partir de (b), on portera une longueur r égale à $(a)b'$. Le point (a) ainsi obtenu sera le rabattement, autour de $n'e'$, du point a demandé, lequel se relèvera, d'après le § (**183.-I.**), en a' et a''.

IV. Une droite d du plan parallèle à P_2 étant prise pour axe de rotation.

Solution. (**Ep. 117.**) Le point a, rabattu en (a), se trouve dans l'espace sur cb, droite d'intersection du plan donné S avec le plan passant par (a) et perpendiculaire à l'axe de rotation d, donc au plan P_2.

Cette droite cb rencontre d au point m, et le point a doit être situé sur cb à une distance de m égale à $(a)m''$. La détermination de ce point se fait, comme pour le cas précédent, à l'aide d'un rabattement auxiliaire du plan perpendiculaire à P_2 autour de sa trace-projection prise pour axe de rotation (**186**).

193. Sixième problème fondamental. *Construire le rabattement d'une droite située dans un plan quelconque.*

Ce problème, ainsi que sa réciproque, admettent quatre cas particuliers caractérisés par la ligne du plan que l'on adopte pour axe de rotation.

Solution. On construit le rabattement d'un point quelconque de la droite (**191**). Le point de rencontre de la droite avec l'axe de rotation sera un second point du rabattement de la droite.

194. Problème réciproque. *Le rabattement d'une droite étant donné, relever cette droite, sachant qu'elle doit être située dans un plan quelconque donné.*

Solution. On relève un des points de la droite (**192**). Le point de rencontre du rabattement de la droite avec l'axe de rotation fournira un second point de la droite.

195. Septième problème fondamental. *Etant donnés plusieurs points situés dans un plan quelconque et le rabattement de l'un de ces points, construire les rabattements de tous les autres points à l'aide de trois ou de plusieurs séries de droites parallèles.*

Solution graphique (Ep. 118.) Soient a, b et c trois points du plan S et (c) le rabattement du point c, la trace S_1 étant prise pour axe de rotation.

Par le point c et dans le plan S, faisons passer deux droites quelconques, ayant pour projections sur P_1 les lignes $c'x'$ et $c'y'$. Par les points a et b, menons des droites parallèles à cx et à cy. Nous aurons déterminé, dans le plan S, deux séries de droites parallèles, et par chaque point passera une droite de chacune de ces séries. Ces droites parallèles restent parallèles en rabattement et passeront par les rabattements des points a, b et c, ainsi que par leurs points de rencontre avec l'axe de rotation. On voit que (c) sera le point de rencontre des rabattements des lignes cx et cy ; que (b) se trouve à la rencontre des lignes rabattues $z'(b)$ et $v'(b)$, respectivement parallèles à $x'(c)$ et $y'(c)$, et que (a) est déterminé par un couple de droites parallèles au couple $y'(b)$ et $a'(c)$.

Remarques. I. Les droites perpendiculaires à l'axe qui passent par les rabattements des points ainsi que par leurs premières projections, constitueront une troisième série de droites parallèles.

II. Plus le nombre des séries de droites parallèles est considérable, plus la détermination des points est rigoureuse.

III. Cette méthode d'opération peut s'employer pour chacun des quatre axes de rotation que le rabattement du plan S peut admettre.

196. Problème réciproque. *Etant donnés les rabattements* *de plusieurs points appartenant tous à un plan donné, et les projections de l'un de ces points, relever les autres points à l'aide de trois ou plusieurs séries de droites parallèles.*

Solution graphique. (**Ep. 119.**) Soient (a), (b), (c) les rabattements de trois points du plan S, b' et b'' les deux projections de l'un de ces points.

On joint (a) et (b) par une droite $(a)x'$; par (c), on fait passer une droite parallèle à $(a)(b)$. La droite $(a)(b)$ se relèvera en $x'b'$ et $x''b''$, x et b étant deux points connus de cette droite.

Les projections $z'c'$ et $z''\,c''$ de la droite rabattue $(c)z'$ seront respectivement parallèles aux projections de même nom de xb. Cette série de droites parallèles devant contenir les points a, b et c à construire, et les premières projections a', b' et c' de ces points devant être situées sur des perpendiculaires abaissées des rabattements (a), (b) et (c) sur l'axe de rotation, il est évident que les points a', b' et c' se trouvent déterminés par trois séries de droites parallèles.

Il en sera de même des secondes projections a'', b'' et c'' des points a, b et c.

Remarques. I. En unissant (a) et (c), et en menant par (b) une parallèle à $(a)(c)$, on déterminera une nouvelle série de droites parallèles qui, avec les trois premières, déterminent les points d'une manière plus rigoureuse.

II. Plus le nombre des séries de droites parallèles est grand, plus la détermination des points est rigoureuse.

Problèmes. — Applications.

Vraie grandeur des droites.

197. Problème I. *Construire la vraie longueur d'une portion de droite et les angles que cette droite fait avec les deux plans de projection* P_1 *et* P_2.

Solution dans l'espace. Par la droite, on fait passer un plan perpendiculaire à P_1. On rabat ce plan avec la droite sur P_1 (**182-I**). La droite sera rabattue suivant sa vraie longueur; l'angle que fait la droite ainsi rabattue avec la trace-projection du plan auxiliaire sera l'angle de la droite avec P_1.

Solution graphique. (Ep. 120.) La droite limitée aux deux points a et b sera rabattue en $(a)(b)$ suivant sa véritable longueur. Ce rabattement se fait en élevant aux points a' et b' des normales à l'axe de rabattement d', et en portant, sur ces lignes, les longueurs $a'(a)=a''m$ et $b'(b)=b''n$ (**182**).

Le prolongement de $(a)(b)$ fait avec d' l'angle n, angle de d avec P_1.

2° En faisant passer par la droite un plan normal à P_2 et en rabattant ce plan avec la droite sur P_2 (**182-II**), on aura l'angle que fera la droite rabattue avec d'', angle de la droite avec P_2.

198. Exercices. *Construire la vraie grandeur d'une droite limitée à deux de ses points et l'angle que cette droite fait avec* P_1 *ou avec* P_2 :

1° Lorsque les deux projections de la droite se coupent sur l'axe.

2° Lorsque la droite est située dans le quatrième angle dièdre.

3° Lorsqu'elle est située en partie dans deux dièdres différents.

4° Lorsqu'elle est située dans un plan de profil et qu'elle est connue par deux de ses points.

199. Problème II. *Sur une droite donnée d, marquer un point b à une distance r d'un point donné a de cette droite.*

Solution dans l'espace. On rabat la droite d sur P_1, en prenant la trace-projection de son premier plan projetant pour axe de rotation (**182-I**). A partir du point rabattu en (a), on porte, sur la droite rabattue, une longueur $(a)(b)$ égale à r. Le point (b), extrémité de cette longueur, sera le rabattement du point demandé. On relèvera ce point en b' et b'' sur la droite.

Solution graphique. (Ep. 120.) La solution est toute marquée dans les constructions du problème précédent. Pour relever le point (b), il suffira d'abaisser de (b) une perpendiculaire sur (d) pour avoir, au pied de cette normale, la projection b' de b et, par suite, b'' (**183**).

200. Problème III. *Joindre un point donné à un point de l'axe de projection, de manière que la distance entre ces deux points ait une longueur donnée.*

Solution dans l'espace. Le point donné et l'axe de projection déterminent un plan qui a l'axe de projection pour trace sur P_1. On rabat ce plan avec le point sur P_1, en prenant l'axe de projection pour axe de rotation. Du point rabattu (a) comme centre, avec la distance r comme rayon, on décrira un arc du cercle qui peut couper l'axe de projection en des points qui répondent aux conditions du problème.

Solution graphique. (Ep. 121.) Le plan qui passe par l'axe de projection et par le point donné a est oblique à P_1 et à P_2 ; il a l'axe pour trace sur P_1. Le rabattement du point a sur P_1, autour de l'axe de projection pris pour axe de rotation, se fera donc à l'aide des principes exposés au § 191.

De a', on abaissera une normale sur l'axe de projection et l'on portera sur cette normale, et à partir de l'axe, une longueur égale à l'hypothénuse du triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont les distances des projections a' et a'' du point à l'axe de projection (**191**. Règle pratique). L'extrémité (a) sera le rabattement du point a. Les deux points de rencontre de l'axe avec l'arc de cercle décrit de (a) comme centre avec r pour rayon, sont à une distance r de a.

Remarque. Le problème admet deux solutions, une seule solution, ou devient impossible, suivant que la longueur r est plus grande que $(a)m$, égale à $(a)m$ ou plus petite que cette distance.

201. **Problème IV**. *Construire la distance d'un point à une droite.*

Solution dans l'espace. Le point et la droite déterminent un plan qui contient la distance demandée. On rabat ce plan sur P_1, avec la droite et le point y situés, en prenant sa première trace pour axe de rotation (**191**). La distance du point rabattu à la droite rabattue mesure la distance du point à la droite.

Solution graphique. (Ep. 122.) Pour avoir le plan déterminé par le point et la droite, nous avons uni le point a à la trace n de la droite sur P_2. Nous aurons ainsi les deux traces T_1 et T_2 du plan T (**112**).

Le rabattement de la droite d passe par m' et par (n), rabattement de la trace n de d sur P_2. (n) sera sur la normale $n'(n)$ abaissée de n' sur l'axe de rotation T_1, et à une distance de x égale à xn'' (**191**).

La droite qui unit n et a se rabat en $(n)v'$; sur cette droite se trouve le rabattement (a) du point a.

La perpendiculaire $(a)(b)$ abaissée de (a) sur $(n)m'$ sera le rabattement de la distance du point a à la droite d ; $(a)(b)$ se relève en $a'b'$ et $a''b''$ (**192**).

202. Exercices et Cas particuliers. I. *Construire la distance d'un point de l'axe à une droite quelconque.*

II. *Construire la distance d'un point donné :*

1° A l'axe ;

2° A une parallèle à l'axe ;

3° A une ligne située dans P_2 ;

4° A une ligne parallèle à P_1 ou à P_2.

203. Problème V. *Construire la distance de deux droites parallèles.*

Solution dans l'espace. Les deux droites parallèles déterminent un plan qui contient la distance demandée. On rabat ce plan avec les deux droites sur P_1, en prenant sa première trace pour axe de rotation. La perpendiculaire commune aux deux droites rabattues sera le rabattement de la distance demandée. Cette distance rabattue sera relevée.

Solution graphique. (**Ep. 123.**) La solution graphique se déduit aisément de la solution graphique et de l'épure du problème précédent.

204. Problème VI. *Dans un plan donné, mener une droite qui soit à une distance donnée d'une autre droite également située dans ce plan.*

Solution dans l'espace. Le plan T et la droite d y située seront rabattus sur P_1 autour de la trace T_1 prise pour axe de rotation. Dans le rabattement, on construira une droite (e) parallèle à la droite rabattue, et écartée de celle-ci de la longueur donnée. Cette droite (e) est ensuite relevée et donnera les deux projections e' et e'' de la droite demandée.

Solution graphique. (**Ep. 123**). Pour rabattre la droite d autour de T_1, on construira le rabattement (c) de la seconde trace c'' de cette droite. Ce point c'' restera toujours écarté du point m de l'axe de rotation d'une longueur égale à mc'' (**191**). (c) sera donc le point de rencontre de la normale $c'(c)$, abaissée de c' sur T_1, avec l'arc de cercle décrit de m comme centre avec mc'' pour rayon. Le point (c) joint au point x donne le rabattement (d) de la droite d.

En un point de (d), on élève une normale égale à r, et par l'extrémité de cette normale, on mène une parallèle (e) à (d); (e) sera le rabattement de la droite demandée.

(e) se relève en e' et e''; e' sera parallèle à d' et passera par y'; e'' sera parallèle à d'' et passera par y'', seconde projection de y (**192**).

205. Problème VII. *Etant donnés un point et une droite, construire, sur cette droite, un point distant du point donné d'une longueur donnée r.*

Solution dans l'espace. Le point a et la droite d déterminent un plan T, que l'on rabat sur P_1 autour T_1 prise pour axe de rotation. Du point rabattu (a) comme centre, avec la distance donnée r pour rayon, on décrira un arc de cercle qui coupera la droite rabattue en deux points qui sont les rabattements des points demandés.

Solution graphique. (**Ep. 124.**) On déterminera le plan T en unissant le point a à la seconde trace de la droite. Les rabattements de d et de a s'obtiennent alors comme au § 201. L'arc de cercle de centre (a) et de rayon r coupera (d) aux deux points (l) et (g), rabattements des points demandés. Ces points se relèvent en l' et l'', g' et g'' (**192**).

Remarque. Le problème n'admet qu'une solution, si r est égale à la distance de (a) à (d); le problème est impossible, si r est plus petite que cette distance.

206. Problème VIII. *Vérifier si une droite donnée est parallèle à un plan donné.*

Solution dans l'espace. Par la droite, on fait passer un plan quelconque, pour plus de facilité le premier plan projetant de la droite. Ce plan coupe le plan proposé suivant une droite e. La droite d est parallèle au plan T, si elle est parallèle à e.

Le parallélisme des droites d et e se vérifie par le parallélisme des projections de même nom de ces droites. Il se vérifie également par un rabattement de ces droites sur P_1 autour de la trace-projection du plan projetant qui les contient.

La droite d est parallèle au plan, si les droites rabattues (d) et (e) sont parallèles.

Solution graphique. (**Ep. 125.**) Les rabattements (d) et (e) des deux droites se construisent comme au § 184.

207. Problème IX. *Etant donné un plan* S, *construire un plan parallèle à* S *et distant de ce plan d'une longueur donnée* h.

Solution dans l'espace En un point du plan S, on élève une perpendiculaire à ce plan et l'on porte sur cette perpendiculaire, et à partir de ce point, une longueur égale à h. Le problème est alors ramené à celui de mener par l'extrémité de cette longueur un plan parallèle à S (**116**).

Solution graphique. (**Ep. 126.**) Prenons, pour simplifier l'épure, le point de rencontre m des deux traces du plan et menons par ce point la perpendiculaire au plan S. A l'aide d'un rabattement de cette normale opéré sur P_1, on portera sur cette normale, et à partir de m, une longueur égale à h (**199**).

Le plan R parallèle à S mené par l'extrémité a de cette normale sera le plan demandé.

Remarque. Le plan R coupe l'axe de projection en y. La longueur my portée de l'autre côté de m sur l'axe donnera un second point x de l'axe, par lequel passe un plan T parallèle à S et distant de ce dernier d'une longueur h.

208. Problème X. *Par un point donné a, mener un plan parallèle à l'axe de projection et qui soit distant de cette ligne d'une longueur donnée.*

Solution dans l'espace. (Fig. 127.) Supposons le problème résolu et coupons le plan S à construire par un plan perpendiculaire à l'axe et passant par le point donné a. Ce plan sécant coupe le plan S suivant une droite mn qui passe par le point a, et dont la distance à l'axe est égale à la distance r du plan S à cet axe. Cette droite mn forme avec les deux traces du plan sécant un triangle rectangle onm, ayant o pour sommet de l'angle droit et r pour hauteur correspondante à l'hypothénuse. On construira ce triangle omn; les deux sommets n et m détermineront respectivement les traces S_2 et S_1 du plan S, traces qui sont parallèles à l'axe.

Solution graphique. (Ep. 128.) Le plan auxiliaire normal à l'axe, que l'on mène par a, sera rabattu sur P_2 avec le point a (**186**). Du rabattement (a) du point, on mène une tangente $n(m)$ à la circonférence de cercle décrite de o comme centre avec r pour rayon. $(m)n$ sera le rabattement de l'intersection du plan demandé S avec le plan coupant auxiliaire. En relevant $n(m)$, on aura en n et m les points par lesquels passent respectivement les traces S_2 et S_1 du plan S.

Remarque. Le problème n'est possible que si la longueur r est plus petite que la distance du point a à l'axe de projection. Dans ce cas, le problème admet deux solutions.

Si la longueur r est égale à la distance du point a à l'axe, le problème n'admettra qu'une seule solution.

Angles des droites et des plans.

209. Problème XI. *Construire l'angle de deux droites qui se coupent ainsi que la bissectrice de cet angle.*

Solution dans l'espace. Les deux droites déterminent un plan S qui contiendra l'angle demandé ainsi que la bissectrice de cet angle. On rabat le plan S avec les deux droites sur P_1; l'angle des deux droites rabattues mesure l'angle demandé. La bissectrice de cet angle sera le rabattement, sur P_1, de la bissectrice de l'angle des deux droites.

Solution graphique. (Ep. 129.) Après avoir construit les deux traces S_1 et S_2 du plan des deux droites d et e, on opère le rabattement de celles-ci, en construisant le rabattement (a) de leur point d'intersection a, et en unissant (a) ainsi obtenu aux traces de e et d sur P_1 (**191**).

Le rabattement (a) du point a se trouve sur la normale $a'(a)$ abaissée de a' sur S_1, et sur l'arc décrit de m' comme centre avec $m''a''$ pour rayon. $m''a''$, parallèle à S_2, est, en effet, la vraie longueur de la droite qui joint le point a au point m' de l'axe de rotation (**191**). L'angle en (a) formé par les deux droites rabattues mesure l'angle des deux droites d et e de l'espace.

On construira la bissectrice $(a)v'$ de l'angle obtenu et l'on relève cette droite en $v'a'$ et $v''a''$. Il suffira, à cet effet, de construire les deux projections v' et v'' de v', point de P_1, et d'unir ces points respectivement aux projections de même nom a' et a'' du sommet a de l'angle des deux droites.

Vérification. La bissectrice obtenue est une droite du plan S; ses traces sont donc sur les traces de même nom du plan.

210. Exercices et cas particuliers. *Construire l'angle de deux droites qui se coupent et la bissectrice de cet angle :*

1° Une des droites étant parallèle à P_1 ou à P_2;

2° Une des droites est perpendiculaire à un des plans de projection, et l'autre est quelconque;

3° Une des droites est parallèle à l'axe de projection, ou se confond avec cet axe;

4° Les deux droites ont même projection sur P_1 :

5° Une des droites est dans un plan normal à l'axe, et l'autre est quelconque;

6° Les deux droites sont dans un plan normal à l'axe :

7° Une des droites est normale à P_2, et les deux projections de l'autre droite font des angles de 45° avec l'axe.

211. Problème XII. *Construire l'angle de deux droites non sécantes.*

Solution. L'angle de deux droites non sécantes est l'angle que forment deux droites parallèles aux deux droites données et menées par un point quelconque de l'espace.

On fera donc passer, par un point de la droite d, une droite f parallèle à la seconde droite donnée e.

L'angle des droites d et f, que l'on construit à l'aide du problème précédent, sera l'angle des deux droites non sécantes d et e.

Cas particulier. *Construire l'angle de deux droites non sécantes, chacune d'elles étant parallèle à l'un des plans de projection.*

212. Problème XIII. *Connaissant les traces et les projections sur* P_1 *de deux droites sécantes, ainsi que la vraie grandeur de l'angle qu'elles forment, trouver les projections de ces droites sur* P_2.

Solution graphique. (Ep. 129.) Ce problème peut être considéré comme la réciproque du problème XI. On unira les traces x et y des deux droites sur P_1 par une droite qui sera la trace S_1 du plan des deux droites. Sur xy, on décrira un segment capable de l'angle donné. Le sommet (a) de cet angle, rabattement du point de rencontre des deux droites, se trouvera à l'intersection de la normale $a'(a)$ avec l'arc du segment.

Le point (a) obtenu sera relevé en a' et a''. A cet effet, menons par a' une parallèle à l'axe qui coupera S_1 en m'; $m'(a)$ sera la distance du point a au point m de S_1, longueur qui se projette sur P_2 suivant sa vraie grandeur en $m''a''$.

Le point m'' étant connu, il suffira, pour avoir a'', de décrire de m'' comme centre, avec $m'(a)$ pour rayon, un arc de cercle qui coupera la normale $a'a''$ à l'axe de projection en a''. Le point a déterminera avec x'' et y'' respectivement les projections e'' et d'' des deux droites e et d de l'espace.

213. Problème XIV. *Construire l'angle des deux traces d'un plan ainsi que la bissectrice de cet angle.*

Solution dans l'espace. On rabat le plan donné S avec sa trace S_2 sur P_1 autour de S_1 prise pour axe de rotation. L'angle que fera S_1 avec (S_2) sera l'angle des deux traces du plan.

On construira la bissectrice $m(e)$ de cet angle, et l'on relève cette ligne.

Solution graphique. (Ep. 130.) Pour obtenir le rabattement (S_2), il suffit de construire le rabattement (a) d'un point a'' de S_2. (a) sera le point de rencontre de la normale $a'(a)$ abaissée de a' sur S_1, avec l'arc décrit de m comme centre avec ma'' pour rayon (**119**).

Pour relever la bissectrice $m(e)$, il suffira de relever le point (e), point où la bissectrice coupe le rabattement $b'(a)$ de la droite ba'' du plan S. Ce point (e) se relève en e' et e'' (**192**), et donne me' et me'' pour les projections de la bissectrice.

Remarques. I. La droite $(e)t'$, parallèle à la trace rabattue (S_2), a ses deux projections $e't'$ et $e''t''$ respectivement parallèles à l'axe de projection et à S_2 et passant par t' et t'', points connus. Il est donc inutile de passer par un rabattement auxiliaire pour obtenir le relèvement de (e).

Le point e' sera, en effet, situé sur la normale $(e)e'$ à S_1 et sur $t'e'$.

II. Ce problème peut être considéré comme un cas particulier du problème XI.

Exercice. Résoudre le même problème, les deux traces du plan étant en ligne droite.

214. Problème XV. *Connaissant la première trace d'un plan et l'angle que cette trace fait avec la seconde trace du même plan, construire la seconde trace de ce plan.*

Solution graphique. (Ep. 130.) Ce problème peut être considéré comme la réciproque du problème XIV.

Au point de rencontre m de la trace connue S_1 avec l'axe, on mène une droite (S_2) qui fait avec S_1 l'angle donné. (S_2) sera le rabattement de la seconde trace S_2 demandée. On relève (S_2), en en relevant un point, le point (a).

A cet effet, il suffira d'abaisser de (a) une normale à S_1 et de la prolonger jusqu'à l'axe de projection en a' pour avoir, en ce point, la première projection du point a de S_2. La seconde projection a'' sera sur $a'a''$ et à une distance $(a)m$ de m (**192**), donc au point de rencontre de $a'a''$ avec l'arc de cercle décrit de m comme centre avec $m(a)$ pour rayon.

Remarque. Suivant que l'angle donné est plus grand ou plus petit que l'angle que fait S_1 avec l'axe, ou égal à cet angle, le problème admettra deux solutions, une seule solution, ou devient impossible.

Dans le cas d'une seule solution, le plan S se confond avec P_1.

215. Problème XVI. *Construire l'angle d'une droite et d'un plan.*

Solution dans l'espace. D'un point quelconque de la droite d, on abaisse une perpendiculaire sur le plan donné T. On construit l'angle que fait la droite d avec cette perpendiculaire; cet angle sera le complément de l'angle que d fait avec T.

Solution graphique. Le problème est un cas particulier de celui du § 209.

216. Exercices et cas particuliers. *Construire l'angle d'une droite et d'un plan :*

1° La droite étant quelconque et le plan parallèle à l'axe de projection.

2° La droite étant quelconque et le plan déterminé par un point donné et par l'axe de projection.

3° Le plan étant quelconque et la droite parallèle à l'axe de projection.

4° Le plan étant quelconque et la droite se confondant avec l'axe.

217. Problème XVII. *Construire l'angle qu'une droite fait avec le plan bissecteur* B_1.

Solution dans l'espace. D'un point a de la droite d, on abaisse une perpendiculaire sur B_1. On en détermine le pied b ainsi que le point de rencontre c de la droite donnée avec B_1. Les trois points a, b et c déterminent un triangle rectangle, dont l'angle opposé au côté ab est l'angle demandé.

Solution graphique. (Ep. 131.) Prenons la seconde trace de la droite pour point a et menons, par ce point, un plan normal à l'axe de projection et, par suite, normal à B_1. Ce plan contient la normale abaissée de a sur B_1 et coupe B_1 suivant une droite qui passe par a' et qui fait, comme B_1, 45° avec P_2, donc avec $a''a'$.

Rabattons ce plan auxiliaire T sur P_2 autour de $a''a'$. La droite d'intersection de T avec B_1 se rabat suivant $a'x$, et la normale abaissée de a'' sur B_1 se rabat suivant $a''(b)$, perpendiculaire à $a'x$.

Construisons le point de rencontre c de la droite d avec B_1. Ce point, la première trace principale de d (**66**), se construit en déterminant le point à projections symétriques de la droite (**101**).

Ce point c obtenu, on construira, par rabattement sur P_2, la véritable longueur de la distance $a''c$, et de a'' comme centre, avec cette longueur $a''(c)$ pour rayon, on décrira un arc de cercle qui coupera $a'x$ en c, et déterminera le triangle rectangle $a''(b)c$, dans lequel l'angle en c est l'angle de d avec B_1.

218. Problème XVIII. *Construire les angles qu'un plan fait avec les deux plans de projection* P_1 *et* P_2.

Solution dans l'espace. (**Fig. 132.**) Par un point x de l'axe, on mène un plan perpendiculaire à la première trace S_1 du plan donné, et un autre plan perpendiculaire à S_2. Le premier plan auxiliaire coupe le plan S suivant ab ; l'angle abx sera l'angle plan correspondant du dièdre des plans S et P_1.

Le second plan auxiliaire coupera S suivant de, et l'angle edx mesure le dièdre des plans S et P_2.

Ces angles sont situés dans des plans perpendiculaires, le premier à P_1, le second perpendiculaire à P_2, et se construisent par rabattement.

Solution graphique. (**Ep. 133.**) Les deux plans auxiliaires seront rabattus sur P_1 (**182**).

219. Cas particuliers et exercices. *Construire les angles qu'un plan fait avec les deux plans de projection dans les cas particuliers suivants :*

1° Le plan est parallèle à l'axe de projection.

2° Le plan est déterminé par un point donné et pour l'axe de projection.

3° Le plan est normal au plan bissecteur B_1 ; les traces étant symétriques par rapport à l'axe.

4° Le plan est normal au plan bissecteur B_2 ; les traces ne formant qu'une seule trace-double.

Problème. *Construire le plan bissecteur de chaque dièdre formé par un* *plan avec les plans de projection, et déterminer les projections de l'intersection de ces deux plans bissecteurs.*

220. Problème XIX. *Connaissant la première trace d'un plan et l'angle que ce plan fait avec* P_1, *construire la seconde trace de ce plan.*

Solution dans l'espace. (**Fig. 132.**) L'angle plan qui mesure le dièdre des plans S et P_1 se trouve dans un plan perpendiculaire à S_1 et, par suite, à P_1.

Ce plan coupe P_1 suivant une droite *bx* perpendiculaire à S_1, le plan P_2 suivant *ax* perpendiculaire à *xb*, et le plan S suivant une droite *ba*, qui fait avec *xb* en *b* l'angle que l'on a donné.

Solution graphique. (Ep. 133.) Sur une perpendiculaire $b'x$ à S_1, on construira un triangle rectangle, qui a xb' pour côté de l'angle droit, et en b' un angle aigu égal à l'angle donné. Le sommet (*a*) de ce triangle sera le rabattement du sommet *a* sur P_1 autour de xb', et ce point, relevé en a'' et a' (**182**), donnera en a'' un point de la seconde trace du plan S. Cette seconde trace sera déterminée par a'' et par le point de rencontre *v* de S_1 avec l'axe de projection.

221. Problème XX. *Construire l'angle de deux plans.*

Solution dans l'espace. (Fig. 134). On coupe les deux plans par un plan perpendiculaire à leur intersection *bc*. Ce plan coupera P_1 suivant *mn*, perpendiculaire à la projection $b'c$ de *bc* sur P_1, les plans S et T respectivement suivant les droites *ma* et *na*, perpendiculaires en *a* à *bc*, et formera ainsi le triangle *mna*, dont l'angle en *a* est l'angle plan correspondant du dièdre *bc*.

Il s'agit de construire ce triangle *mna* et, à cet effet, on construira les véritables longueurs de ses trois côtés. Le côté *mn* se trouvera tout construit sur P_1 et les côtés *ma* et *na* se construiront en rabattant, sur P_1, successivement les plans S et T avec *bc* et les droites *ma* et *na* y situées.

Solution graphique. (Ep. 135.) Pour construire le côté *ma* du triangle *mna*, on rabat le plan S qui contient cette droite sur P_1 autour de S_1. La droite d'intersection *bc* des deux plans S et T se rabat en $c'(b)$ (**192**), et la droite *ma* passera, dans ce rabattement, par *m* et sera perpendiculaire à $c'(b)$; $m(a)$ est donc la véritable longueur du côté *ma*. On construira d'une manière analogue le côté *na* en rabattant, sur P_1, le plan T qui contient cette droite. Dans ce rabattement, le côté *na* passe par *n*, point fixe, et sera perpendiculaire à $c'(b)$, rabattement de *cb* autour de T_1 ; $n(a)$ sera la vraie longueur du côté *na*.

Sur *mn* comme base, avec les deux côtés obtenus $m(a)$ et $n(a)$, on construira le triangle *mna*, qui a en *a* l'angle plan correspondant du dièdre de T et de S.

Remarque. La hauteur *ah* du triangle *man* est normale à *mn* et se rabat sur P_1 le long de hc' ; le sommet *a* se trouvera donc rabattu également en un point de $b'c'$. Il résulte de là que les deux arcs de cercle décrits de *m* et de *n* comme centres, respectivement avec $m(a)$ et $n(a)$ comme rayons, doivent se couper en un point de $b'c'$.

Deuxième solution. (Fig. 134.) On coupera les deux plans S et T par un plan normal à la droite d'intersection *bc*. Ce plan coupe le trièdre formé par S, T et P_1 suivant le triangle *man*. La hauteur *ah* de ce triangle étant perpendiculaire en *h* à *mn*, droite de P_1, doit se projeter sur P_1 le long de $b'c'$ (**49**) ; *ah* est donc une droite du premier plan projetant de *bc*.

D'un autre côté, *ah* est dans le plan *mna* normal à *bc* ; elle est donc normale également à cette droite, et peut se construire en rabattant *bc* sur P_1 autour de $b'c$ pris pour axe, et en abaissant de *h* une perpendiculaire sur ce rabattement de *bc*.

Ayant la base *mn* et la hauteur *ah* du triangle *mna*, ainsi que la trace *h* de cette hauteur sur la base *mn*, on pourra construire ce triangle, dont l'angle *a* est l'angle plan du dièdre formé par les plans T et S.

Solution graphique. (Ep. 136.) On coupe donc les deux plans T et S par un plan perpendiculaire à *bc* ; la première trace *mn* de ce plan sera normale à $b'c'$ et donne la base *mn* du triangle *man*.

On rabat *bc* sur P_1 en $(b)c'$, et la normale abaissée de *h* sur $(b)c'$ sera la hauteur du triangle *man*. Cette hauteur portée en *h* sur hc' donne, en *a*, le sommet du triangle *man*, et, par suite, en *a*, l'angle qui mesure celui des deux plans.

Troisième solution. D'un point pris dans l'angle des deux plans, on abaisse une perpendiculaire sur chacun de ces plans. L'angle de ces deux droites (**209**) sera le supplément de l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans.

222. Problème XXI. *Construire le plan bissecteur du dièdre de deux plans donnés.*

Solution dans l'espace. (**Fig. 134**.) Le plan bissecteur contient la droite d'intersection bc des deux plans, et la bissectrice ak de l'angle plan correspondant man du dièdre des deux plans.

Les traces du plan bissecteur passeront donc par les traces de même nom de ces deux droites.

Solution graphique. (**Ep. 135**.) La première trace du plan bissecteur passera par c' et k, trace de la bissectrice de l'angle man. La seconde trace passe par b'' et par le point de rencontre x de la première trace avec l'axe de projection.

223. Exercices et cas particuliers. *Construire l'angle de deux plans et le plan bissecteur de cet angle :*

1° *Les traces sur* P_1 *ou sur* P_2 *sont parallèles.*

On coupe par un plan perpendiculaire à la droite d'intersection des deux plans.

Ce plan est perpendiculaire à P_1 ou à P_2, suivant que les traces des plans sur P_1 ou sur P_2 sont parallèles. (**Ep. 137.**)

2° *Un des deux plans est parallèle à l'axe.*

Employer la deuxième solution.

3° *Les deux plans sont parallèles à l'axe.*

Le plan auxiliaire perpendiculaire à la droite d'intersection des deux plans devient un plan de profil. Le plan bissecteur v est également parallèle à l'axe. (**Ep. 138.**)

4° *Un des deux plans est perpendiculaire à l'axe.*

Employer la deuxième solution.

5° *Les deux plans ont même trace sur* P_1 *ou sur* P_2.

Le plan auxiliaire devient perpendiculaire à P_1 ou à P_2. (**Ep. 139.**) La trace commune appartient au plan bissecteur v.

6° *Un des deux plans est déterminé par l'axe et par un point* b.

Employons la deuxième solution. A cet effet, construisons d'abord la droite d'intersection des deux plans, dont l'un est représenté par l'axe et par le point b. En unissant b à un point quelconque e de l'axe, on a une droite de ce deuxième plan.

Coupons (**Ep. 140.**) les deux plans par un plan auxiliaire H parallèle à P_1. Ce plan coupera le plan T suivant une droite parallèle à T_1, et l'autre plan suivant une parallèle à l'axe qui passe par le point de rencontre C de H avec bc. Le point de rencontre de ces deux droites d'intersection déterminées par H sera un point d de la droite d'intersection des deux plans proposés, laquelle droite passant par x se trouve déterminée et sera xd.

On coupera les deux plans par un plan auxiliaire normal à xd. La première trace de ce plan sera normale à xd' et donne la base mn du triangle mna de la deuxième solution (**221**). Le sommet a s'obtient en rabattant xd en $x(d)$ sur P_1, et en abaissant de h la normale $h(a)$ sur $x(d)$; $h(a)$ sera la hauteur rabattue du triangle mna, par suite, le sommet a est obtenu ainsi que l'angle man des deux plans.

Le plan bissecteur V a sa trace V_1 qui passe par x et par k, trace de la bissectrice ak de man sur P_1.

La seconde trace V_2 passera par x et par la seconde trace d'une parallèle à V_1 menée par d, point de l'intersection commune des deux plans proposés, donc point du plan bissecteur.

7° *Un des deux plans est parallèle à l'axe; l'autre passe par l'axe et par un point donné.*

Employez la deuxième solution.

8° *Un des deux plans a ses traces en ligne droite; l'autre plan passe par un point donné.*

9° *Les traces des deux plans se coupent toutes au même point de l'axe.*

Construire d'abord la droite d'intersection des deux plans (**132**), puis employer la deuxième solution.

10° *Les deux traces de chacun des deux plans sont en ligne droite.*

Les deux plans T et S (**Ep. 141.**) sont perpendiculaires au plan bissecteur B_2; ils se coupent donc suivant une droite normale à B_2, laquelle droite se projette suivant une normale à l'axe (**73**). On en déterminera les deux points a et b.

On coupe, comme dans la deuxième solution, les deux plans T et S par un plan normal à ab. Ce plan donne la base mn du triangle man et h sera le pied de la hauteur ha, laquelle hauteur se construit par rabattement en (ha), etc.

Le plan bissecteur V passe par k et par le point de rencontre des deux traces T_1 et S_2; il est d'ailleurs normal à B_2, ses traces sont donc en ligne droite et se confondent avec la droite $a'k$.

224. Problème XXII. *Connaissant les traces sur* P_1 *de deux plans, la première projection de la droite d'intersection et l'angle des deux plans, construire les traces de ces plans sur* P_2.

Solution graphique. (**Ep. 142.**) Ce problème est la réciproque du problème du § 220.

En coupant les deux plans par un plan perpendiculaire à la droite d'intersection, on obtient *mn*, normale à $c'b'$, pour base du triangle *man*. Sur *mn*, on décrit un segment capable de l'angle donné des deux plans. Le point de rencontre de ce segment avec $b'c'$ sera le sommet rabattu du triangle *mna* ; *ah* en sera la hauteur.

On décrira, de h comme centre avec *ah* pour rayon, un arc de cercle ; la tangente à cet arc menée par c' sera le rabattement $c'(b)$ de la droite d'intersection des plans T et S, autour de la trace-projection $b'c'$ de son plan projetant. On relèvera (b) en b'', et les traces T_2 et S_2 qui doivent se couper en ce point sont déterminées.

—

Problèmes et exercices.

—

225. Problème XXIII. *Construire les traces d'un plan, connaissant la première projection de sa ligne de plus grande pente et l'angle du plan avec* P_1.

Solution graphique. (Ep. 143.) Si d' est la première projection de la ligne de plus grande pente d du plan T, a' la première trace de d, la trace T_1 du plan passe par a' et sera perpendiculaire à d'. La ligne de plus grande pente d étant normale à T_1, elle se trouve dans un plan normal à T_1, plan dont la trace-projection sur P_1 est d', et qui coupe T et P_1 suivant l'angle plan correspondant donné du dièdre P_1T. Il suffira donc de construire en a' sur d' un angle égal à l'angle de T avec P_1, de prolonger le côté de cet angle jusqu'à sa rencontre en (b) avec la normale $b'(b)$ à d', pour avoir, en (b), le rabattement du point b de T_2. Ce point se relève en b'' et déterminera T_2.

226. Problème XXIV. *Déterminer la seconde projection d'un point situé dans un plan, étant donnés la première projection* a' *de ce point, la première trace du plan et l'angle que ce plan fait avec* P_1.

Solution graphique. (Ep. 144.) Par a', on mène un plan perpendiculaire à la trace donnée T_1 du plan T. Ce plan coupe les plans T et P_1 suivant l'angle plan connu du dièdre de T avec P_1, et le plan P_2 suivant une normale à l'axe. On rabat ce plan auxiliaire sur P_1 autour de d', et l'on a ainsi le triangle rectangle $c'b'(c)$, dont le sommet (c) est le rabattement du point c de T_2. On relève (c) en c'; on aura $c''b''$, seconde projection de la droite d'intersection de T avec le plan auxiliaire. Le point a est sur cette droite, donc a'' est sur $b''c''$.

227. Problème XXV. *Même problème que le précédent, on donne la seconde projection du point et l'on suppose que, par suite des dimensions de l'épure, il n'est pas possible de déterminer la seconde trace du plan.*

Ce problème est un cas particulier du problème précédent.

228. Problème XXVI. *On donne la première trace d'un plan, les deux projections d'un point et la distance de ce point au plan : déterminer l'autre trace du plan.*

Solution dans l'espace. La distance du point a au plan T se projette sur P_1 sur la perpendiculaire $a'b'$ à T_1, trace-projection sur P_1 du premier plan projetant mené par cette distance. Ce plan projetant contient le point a, coupe le plan T suivant une droite, laquelle est à la distance donnée de a et, par suite, tangente à la circonférence de cercle décrite, dans ce plan projetant, de a comme centre avec la distance donnée pour rayon.

Solution graphique. (Ep. 145.) On mène par a' une perpendiculaire à T_1 et l'on rabat le point a en (a) sur P_1, en prenant cette perpendiculaire pour axe de rabattement. La tangente menée par b' à la circonférence de cercle décrite de (a) comme centre avec la distance donnée pour rayon, coupe la normale $c'(c)$ en (c). $b'(c)$ sera le rabattement d'une droite de T, droite qui se relève en $b''c''$. xc'' sera la seconde trace T_2 du plan T.

Remarques. I. Le problème admet deux solutions, si la distance donnée d est plus petite que $b'(a)$.

Le plan T devient le plan P_1, si d est égale à $a'(a)$, égale à la première hauteur du point a.

Le problème est impossible, si d surpasse $b'(a)$.

II. Après avoir construit le pied e de la perpendiculaire abaissée de a sur ce plan, il faut que (e) soit le rabattement de ce point et que $(e)e'$ soit égale à la distance de e'' à l'axe. Cette dernière remarque renferme les vérifications du problème.

229. Problème XXVII. *Déterminer la seconde trace d'un plan dont on connaît la première trace et la distance d'un point de l'axe à ce plan.*

Ce problème est un cas particulier du problème précédent.

230. Problème XXVIII. *Déterminer les traces d'une droite qui passe par deux points donnés situés dans un plan* T *perpendiculaire à l'axe, un plan de profil.*

Solution dans l'espace. On rabat sur P_2 le plan T avec les deux points et la droite y situés. Les points de rencontre de la droite rabattue avec T_2 et avec l'axe sont les rabattements des traces de la droite respectivement sur P_2 et P_1. Ces traces sont ensuite relevées.

Solution graphique. (Ep. 146.) La droite rabattue s'obtient en construisant (**182**) le rabattement des deux points donnés a et b. Les traces demandées sont les points d et e'.

231. Problème XXIX. *Construire le point de rencontre d'un plan avec une droite située dans un plan perpendiculaire à l'axe, la droite étant déterminée par deux de ses points.*

Solution dans l'espace. Le plan S normal à l'axe qui contient la droite coupe le plan donné T suivant une droite. Le point de rencontre de cette droite avec la droite donnée est le point où celle-ci coupe le plan T.

Solution graphique. (Ep. 147.) Le plan S coupe le plan T suivant une droite qui a pour traces les points de rencontre m et n des traces de même nom des deux plans. On rabat S sur P_2 avec les points m et n, a et b y situés. On aura $(a)(b)$ pour rabattement de la droite donnée et $m(n)$ pour celui de la droite d'intersection des deux plans S et T. $m(n)$ coupe $(a)(b)$ en (c), rabattement du point demandé, lequel se relève en c' et c''.

232. Problème XXX. *Par un point donné, mener une droite qui rencontre l'axe de projection sous un angle donné.*

Solution dans l'espace. Le point donné a et l'axe déterminent un plan qui contient la droite demandée. On rabat ce plan sur P_1, en se servant de l'axe de projection comme axe de rotation. Par le rabattement (a) du point ainsi obtenu, on mène une droite qui fait avec l'axe l'angle voulu et l'on a le rabattement de la droite demandée. Cette droite est ensuite relevée.

Solution graphique. (Ep. 148.) Pour avoir le rabattement (a) du point a sur P_1, appliquons la règle pratique **(191)**. De a', on abaisse une normale sur l'axe de rotation (ici l'axe de projection). A partir de cet axe, on porte, sur cette normale, une longueur égale à la distance du point a à l'axe, distance qui est l'hypothénuse d'un triangle rectangle $m(a)n$, dont les deux côtés de l'angle droit sont les distances des projections a' et a'' de a aux projections de même nom de l'axe (ici l'axe de projection). On a donc ainsi (a) et, par suite, (d), droite demandée rabattue. Cette droite se relèvera en xa' et xa''.

233. Problème XXXI. *Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec les plans de projection, des angles donnés.*

Solution dans l'espace. (Fig. 149.) Supposons le point b sur P_2. Soit ab la droite demandée qui fait un angle α avec P_1 et un angle β avec P_2.

Rabattons la droite ba sur P_2, en nous servant de la seconde trace bb' de son premier plan projetant comme axe. Le rabattement $b(a)$ sera l'hypothénuse du triangle rectangle $bb'(a)$ et fait, en (a), avec l'axe, un angle égal à α.

Sur $b(a)$ comme hypothénuse, construisons un triangle rectangle, ayant en b un angle aigu égal à β. Le sommet de l'angle droit (a'') est à la même distance du point b que l'est le point a'', seconde projection de la trace a sur P_1 de la droite proposée ab.

Les longueurs $b(a'')$ et $b'(a)$ seront respectivement les longueurs des projections de ab sur P_2 et P_1.

Solution graphique. (Ep. 150.) D'un point quelconque b'' pris sur P_2, on abaisse une perpendiculaire sur l'axe. On construit un triangle rectangle, ayant $b''b'$ et l'axe pour côtés de l'angle droit, et en (a) un angle aigu égal à α.

Sur $b''(a)$ comme hypothénuse, on construit un nouveau triangle rectangle, ayant en b'' un angle aigu égal à β.

De b'' comme centre, avec $b''(a'')$ comme rayon, on décrit un arc de cercle, qui coupera l'axe de projection en a'', projection, sur P_2, de la trace a de ab sur P_1.

Cette trace a se trouvera sur la perpendiculaire élevée en a'' à l'axe, et sur l'arc décrit de b' comme centre avec $b'(a)$ comme rayon.

La droite d ainsi construite fait un angle donné α avec P_1 et un autre angle donné β avec P_1.

Parallèlement à d, on mène une droite par le point donné f. La droite ainsi construite répond aux conditions du problème.

Remarque. Le problème est possible, si la somme des angles $\alpha + \beta$ est égale à 90° ou plus petite que 90°.

En effet, pour que la construction précédente soit possible, il faut que la longueur $b''(a'')$ soit égale à $b''b'$ ou plus grande que $b''b'$.

Or $b''(a'') = b''(a)\ cos\ \beta$ et $b''b' = b''(a)\ sin\ \alpha$; il faut donc, pour que le problème soit possible, que $cos\ \beta$ soit égal à $sin\ \alpha$ ou plus grand que $sin\ \alpha$, ce qui arrive si $\alpha + \beta > 90°$.

234. Problème XXXII. *Par une droite donnée d, faire passer un plan qui fasse, avec* P_1, *un angle donné* α.

Solution dans l'espace (Fig. 151.) Les traces du plan passeront par les traces de même nom de la droite. La trace sur P_1 passe donc par b', première trace de d.

Par a'', seconde trace de d, menons une ligne de plus grande pente du plan sur P_1; elle se projette sur P_1 suivant $a'c'$, perpendiculaire à la première trace du plan demandé, et fera, avec sa projection $a'c'$, l'angle donné α. On peut construire le triangle $a''a'c'$ et par suite, on a $a'c'$, rayon d'une circonférence de cercle de centre a' à laquelle la première trace du plan demandé doit être tangente.

Solution graphique. (Ep. 152.) On construira, sur P_2, un triangle rectangle $a''a'(c')$, ayant $a''a'$ pour côté de l'angle droit et pour angle aigu adjacent $\beta = 90° - \alpha$. $a'(c')$ sera la longueur de la première projection de la ligne de plus grande pente du plan, laquelle projection est, comme on sait, normale à la première trace du plan.

De a' comme centre avec $a'(c')$ pour rayon, on décrira un arc de cercle; de b', on mènera une tangente à cet arc. Cette tangente sera la première trace T_1 du plan. La seconde trace sera T_2.

Remarque. Suivant que le point b', première trace de d, est à l'intérieur de la circonférence de rayon $a'(c')$, sur cette circonférence, ou en dehors de cette ligne, le problème est impossible, admet une solution ou en admet deux.

Or, ces conditions arrivent si l'angle de la droite d avec P_1 est plus grand que α, égal à α ou plus petit que cet angle.

235. Problème XXXIII. *Par un point donné, mener un plan qui fasse des angles donnés avec les deux plans de projection.*

Solution dans l'espace. (Fig. 153.) Construisons d'abord un plan faisant des angles donnés α avec P_1, β avec P_2, puis, par le point donné, menons un plan parallèle à ce plan ainsi construit.

Soit s ce plan. Du point m situé sur l'axe, menons un plan perpendiculaire à s_1 et un autre plan perpendiculaire à s_2. Le premier coupe s suivant la droite $d'e''$ qui fait avec $d'm$ un angle α, et le second coupe s suivant $b''c'$ qui coupe $b''m$ sous un angle égal à β. Les deux triangles $md'e''$ et $mb''c'$ sont rectangles en m et ont même hauteur mr, ligne d'intersection des plans de ces deux triangles. Ces plans sont tous les deux perpendiculaires au plan s, comme étant perpendiculaires respectivement à s_1 et à s_2, arêtes de deux dièdres comprenant, comme face commune, le plan s.

Solution graphique. (Ep. 154.) Sur l'axe, au point m et dans P_2, on construira le triangle rectangle $e''m(d)$, rectangle en m et ayant l'angle en (d') égal à α. Le triangle $e''m(d')$ peut être considéré comme étant le rabattement, autour de $e''m$ et sur P_2, du triangle $e''md'$ de l'espace, triangle, dont le sommet d' est sur s_1 et dont le côté md' est perpendiculaire à s_1. Par conséquent la trace s_1 cherchée passera par c' et sera une tangente à l'arc décrit de m comme centre avec $m(d')$ pour rayon.

Sur l'axe, en m et dans P_1, construisons un autre triangle $mc'(b'')$, rectangle en m et ayant l'angle en $(b'')=\beta$ et pour hauteur r. Ce triangle peut être considéré comme celui de l'espace de même nom et rabattu sur P_1 autour de mc' pris pour axe. Donc, la trace s_2

du plan passera par c' et sera tangente à l'arc décrit de m comme centre avec $m(b'')$ pour rayon.

Remarque. Le problème n'est possible que pour autant que les tangentes aux deux arcs se coupent en un même point x de l'axe.

Le plan s une fois trouvé, le plan T mené par a parallèlement à s sera le plan qui satisfait aux conditions du problème.

236. Problème XXXIV. *Connaissant les traces de deux plans sur* P_1 *et le rabattement de leur intersection commune autour de chacune de ces traces, construire les traces de ces plans sur* P_2.

Solution graphique. (Ep. 155.) Soient S_1 et T_1 les deux traces données des deux plans S et T, soient $a'x$ et $a'y$ les rabattements sur P_1 de l'intersection commune autour de S_1 et T_1. Ces deux rabattements passent par le point de rencontre a' de S_1 et T_1, point qui est la première trace de l'intersection commune et qui se projette sur P_1 au point a'' de l'axe.

Prenons, sur chacun de ces deux rabattements, un point (b) également écarté de a'. Ces deux points (b) sont les deux rabattements d'un point b de l'intersection commune, lequel point, devant avoir sa projection b' sur la perpendiculaire abaissée de (b) sur T_1, et sur la perpendiculaire abaissée de (b) sur S_1, se projette en b', point de rencontre de ces perpendiculaires.

En joignant $a'b'$, on a la première projection de l'intersection des deux plans, et le point de rencontre c' de cette projection avec l'axe sera la première projection du point de rencontre c des secondes traces des deux plans. Ce point c aura son rabattement sur P_1, autour de S_1, au point de rencontre (c) de $a'x$ avec la perpendiculaire $c'(c)$ à S_1. Le rabattement du même point sur P_1, autour de T_1, sera en (c) sur $a'y$. Le point c est donc écarté de m d'une longueur égale à $m(c)$ et de n d'une longueur égale à $n(c)$; il se trouvera par suite au point de rencontre des deux arcs de cercle décrits de m et n comme centres, respectivement avec $m(c)$ et $n(c)$ pour rayons.

Vérifications. Les données du problème sont bien choisies, si les deux arcs de cercle se coupent en un point de la normale $c''c'$ à l'axe.

237. Problème XXXV. *Trois points étant donnés, construire* *le triangle dont ces trois points seraient les sommets, ainsi que les projections du centre du cercle inscrit.*

Solution dans l'espace. Par les trois points donnés on fait passer un plan T. On rabat ce plan avec les trois points sur P_1 en prenant la trace T_1 pour axe.

Le triangle qui a les trois points rabattus pour sommets sera le triangle demandé.

On construira le centre du cercle inscrit de ce triangle, point qui sera ensuite relevé.

Solution graphique. (Ep. 156.) Soient les trois points a, b et c, par lesquels on fera passer le plan T (**111**). Pour rabattre le point b sur P_1, on se sert de la règle pratique du § 191. On abaissera de b' une perpendiculaire sur T_1 et l'on portera sur cette perpendiculaire, et à partir de m, une longueur égale à l'hypothénuse du triangle rectangle qui a $b'm$ et $b''n$ pour côtés de l'angle droit.

Le rabattement (c) du point c se trouvera sur $v(b)$ et sur la perpendiculaire $c'(c)$ abaissée de c' sur T_1.

Le rabattement (a) du point a est, à son tour, déterminé par le point de rencontre de $r(c)$ avec $a'(a)$ normale à T_1 (**191**).

On aura ainsi $(a)(b)(c)$, rabattement du triangle de l'espace. On construira le centre du cercle inscrit (d) de ce triangle, point que l'on relève en d' et d'', en se servant des droites $(d)(a)s$ et $(c)(d)u$. Ces droites se projettent sur P_1 en $sa'd'$ et $ud'c'$ et se coupent en d' ; elles se projettent sur P_2 en $s''a''$ et $u''\,c''$ et se coupent en d''.

Vérifications. La droite $(d)d'$ doit être perpendiculaire à T_1 et la droite $d'd''$ doit être normale à l'axe de projection.

238. Problème XXXVI. *Par un point donné a mener une droite qui coupe une autre droite donnée sous un angle donné.*

Solution dans l'espace. La droite donnée d et le point a déterminent un plan T que l'on rabat avec d et a sur P_1. Par le point a rabattu on mène une droite qui coupe la droite rabattue sous l'angle donné. Cette droite relevée donnera les projections de la droite demandée.

Solution graphique. (Ep. 157.) Par le point donné a on mène une droite parallèle à la droite donnée d et l'on détermine ainsi le plan T, dont on construira les deux traces T_1 et T_2. Pour rabattre la droite *d*, remarquons qu'elle coupe l'axe de rotation T_1 en v' et la trace T_2 en m''. Le point m'' se rabat en (m), point de rencontre de la perpendiculaire $m'(m)$ à T_1 avec l'arc décrit de x comme centre avec xm'' pour rayon (**191**). La droite rabattue passera donc par (m) et par v'. Pour avoir le rabattement (a) du point *a*, rabattons *aw*, parallèle à *d*, en $w'(a)$ parallèle à (d), nous aurons (a) au point de rencontre de $w'(a)$ avec la perpendiculaire $a'(a)$ abaissée de a' sur l'axe.

Par le rabattement (a) obtenu on mènera la droite $(a)(b)$ qui coupe la droite $v'(m)$ en (b) sous un angle égal à l'angle donné.

Cette droite $(a)(b)$ sera ensuite relevée en $a'b'$ et $a''b''$. Dans cette opération on se servira du point $r'r''$.

Vérifications. 1° b' et b'' sont unis par une normale à l'axe de projection.

2° Les trois points r', b' et a' sont en ligne droite. Il en est de même des points r'' b'' et a''.

3° La droite *ab* est dans le plan T ; ses traces sont sur les traces de mêmes noms du plan.

239. Problème XXXVII. *Etant donnés le rabattement d'une circonférence de cercle et les projections d'un point de cette courbe, construire les projections d'autant de points de cette circonférence que l'on voudra.*

Solution graphique. (**Ep. 158.**) Ce problème est une application du problème du § 195.

Soit (b) un point de la circonférence rabattue, point qui a ses projections données en b' et b''.

On unira (b) à un point quelconque (c) de la circonférence rabattue. Les droites parallèles à $(b)(c)m'$ formeront une première série de droites parallèles, lesquelles droites se relèvent sur P_1 suivant des parallèles à $m'b'$, et sur P_2 suivant des parallèles à $m''b''$.

Des droites parallèles à $(d)(c)r'$ formeront une deuxième série de droites parallèles. Une troisième série de droites parallèles est celle des normales à l'axe de rotation.

240. Problème XXXVIII. *Par un point donné mener une droite* *qui rencontre une autre droite donnée et qui fasse, avec un plan donné, un angle donné.*

Solution dans l'espace. (Fig. 159.) La droite demandée doit passer par le point donné a et s'appuyer sur la droite d. Elle est donc située dans le plan déterminé par d et par a et ne peut rencontrer le plan donné s qu'en un point situé sur l'intersection de s avec le plan auxiliaire déterminé par d et par a.

Comme l'angle que la droite demandée doit faire avec s est donné, nous connaissons aussi son complément β, angle que la droite fera avec la perpendiculaire ai abaissée du point a sur le plan s. Cette perpendiculaire ai, qui mesure la distance du point a au plan s, nous donnera aussi, dans un triangle rectangle aim, la distance du pied i de cette perpendiculaire au point m où la droite demandée perce le plan s.

Solution graphique. (Ep. 160.) Par le point a et la droite d on fait passer un plan, dont on construit l'intersection fg avec le plan s.

Du point a on abaisse une perpendiculaire sur le plan s et l'on en détermine le pied i ainsi que la véritable longueur du segment ai.

On construira, en dehors de l'épure, un triangle rectangle ayant ai pour un des côtés de l'angle droit et dont l'angle aigu adjacent à ce côté est égal à β, complément de l'angle que d doit faire avec s. On déterminera im, distance qui sépare le point où la droite perce le plan s du pied i de la perpendiculaire.

Dans le plan s et sur fg on détermine un point t, distant de i de la longueur im, ce qui se fait en rabattant le plan s avec i et fg dans le plan P_1 en prenant s_1 pour axe de rotation.

241. Problème XXXIX. *Réduire un angle à l'horizon.*

Solution dans l'espace. (Fig. 161.) Réduire un angle à l'horizon veut dire, trouver la projection sur P_1 (P_1 étant un plan horizontal) d'un angle donné m, connaissant la hauteur du sommet s au-dessus de P_1, et les angles α et β que les côtés sc et sb font avec la verticale sa.

La solution du problème consiste à construire le triangle bac, le sommet a étant donné et les trois côtés ab, ac et bc pouvant se construire par rabattement.

Solution graphique. (**Ep. 162.**) Plaçons le sommet s dans P_2 en s'', à une distance $s''a'$ de l'axe égale à sa. Rabattons autour de sa et sur P_2 le triangle sca formé dans l'espace par sa, sc et sa projection ac. Ce rabattement nous est connu, vu que l'on donne l'angle α. $a'(c)$ sera la longueur de la projection sur P_1 de l'un des côtés de l'angle.

Rabattons de même sur P_2 et autour de $s''a'$ le triangle sab de l'espace ; nous aurons en rabattement le triangle $s''a'b'$ qui nous donne $a'b'$, projection du côté sb sur P_1. Pour avoir bc, remarquons que l'angle m étant connu, et les côtés sb et sc du triangle sbc de l'espace construits par rabattement en $s''b'$ et $s''(c)$, le triangle construit sur $s''b'$ avec l'angle m et le côté $s''(c)$ peut être considéré comme le rabattement sur P_2, autour de $s''b'$, du triangle bsc de l'espace. Ce rabattement nous donne $b'c$, troisième côté du triangle abc de l'espace à construire.

Soit donc $a'b'$ un des côtés de ce triangle. De a' comme centre avec $a'(c)$ pour rayon, et de b' comme centre avec $b'c$ pour rayon on décrit des arcs de cercle qui se coupent en c' ; le triangle $b'a'c'$ contient l'angle $b'a'c'$, projection sur P_1 de l'angle m de l'espace.

Chapitre VIII.

—

Changements de plans de projection.

242. Considérations générales. Tout problème de géométrie, pour être résolu par les procédés de la Géométrie Descriptive, exige un certain nombre de constructions graphiques à exécuter sur les plans de projection. Ces opérations se simplifient et leur nombre se modifie suivant le choix plus ou moins heureux de ces plans.

Les données d'un problème étant déterminées par rapport à ces plans de projection adoptés ou imposés, on peut s'apercevoir que la solution du problème conduit à des constructions très-laborieuses et qu'il eût été préférable de choisir telle autre disposition pour les plans de projection que l'on a reconnu comme présentant quelques avantages sous le rapport de la facilité des constructions.

Les données d'un problème consistent en points, lignes droites ou courbes et plans. Supposons ces éléments invariablement reliés entre eux; ils formeront un ensemble S, dont aucune partie ne peut se mouvoir isolément.

Changements de plans de projection. En déplaçant le plan P_2, tout en le laissant normal à P_1, on peut arriver à lui donner une position telle, que la projection orthogonale de S sur ce nouveau plan de projection conduise, dans la solution du problème, à des opérations graphiques très-simples, ou même à la suppression de quelques-unes de ces opérations.

On dit que l'on a *changé le plan de projection* P_2. *On a opéré un changement de plan de projection.*

On peut de même *changer le plan de projection* P_1 et le remplacer par un autre plan normal à P_2.

Remarquons toutefois, que si l'on veut changer les deux plans P_1 et P_2 et les remplacer par un nouveau système de plans de projection P_3 et P_4, ces deux nouveaux plans doivent être perpendiculaires entre eux.

On n'arrive à ce résultat qu'en remplaçant le système des plans P_2 et P_1 par les plans P_3 et P_1, puis ces derniers plans par P_3 et P_4. Dans ces changements, le plan P_3 qui remplace P_2 sera perpendiculaire à P_1 et le nouveau plan qui remplace P_1 doit être perpendiculaire à P_3.

Rotations. Parfois la nature de la question s'oppose à un changement de plans de projection. Dans ce cas on peut opérer comme suit :

On suppose S relié invariablement à un axe fixe perpendiculaire à P_2 ou à P_1. Aucun des éléments qui constituent S ne peut tourner séparément autour de l'axe sans entraîner dans ce mouvement tout le système S. En donnant à S un mouvement de rotation autour de cet axe, il peut arriver, qu'à un moment donné, la position de S soit telle vis-à-vis des plans de projection restés fixes, que les nouvelles projections de S sur ces plans se prêtent à des constructions graphiques très-simples.

Evidemment S n'a pas changé de forme et la solution dans l'espace du problème à résoudre sera la même, mais la solution graphique a été simplifiée par le déplacement des données.

On aura *opéré une rotation autour d'un axe perpendiculaire à* P_1 *ou à* P_2.

La première méthode d'opérer constitue *la méthode par changement de plans de projection.*

Dans la deuxième méthode on a opéré *par rotation.*

Remarque. On peut comparer ces deux méthodes d'opération à ce qui se produit quand on regarde l'image d'un objet S (un cristal, un polyèdre, etc.), réfléchie par une glace prise pour plan P_2.

En supposant, comme on le fait pour les épures, que le spectateur se trouve à une distance infiniment grande devant P_2, la glace, de manière que les rayons visuels soient parallèles et normaux à la glace, cette image peut être comparée à la projection S″ de S sur la glace P_2.

En déplaçant le glace P_2, tout en la laissant perpendiculaire à P_1, la projection de S sur P_2 change de forme et fait voir, pour une certaine position de P_2, des points, des arêtes, cachés pour la position que P_2 occupait antérieurement.

On aura figuré un changement du plan de projection P_2.

Au lieu de déplacer P_2, on fera tourner S autour d'un axe perpendiculaire à P_1 et une altération des projections de S sur P_2 se produira encore.

On aura figuré une rotation de S autour d'un axe perpendiculaire à P_1.

243. Principes fondamentaux. D'après ce qui précède il s'agit, dans les changements de plans de projection, de trouver les nouvelles projections des données d'un problème sur un nouveau système de deux plans rectangulaires qui a un plan commun avec le système des plans P_1 et P_2 qu'il remplace.

Or, sur ces nouveaux plans P_3 P_1 ou P_3P_2, les projections des éléments jouissent des mêmes propriétés que celles qui les caractérisaient sur P_1 et P_2.

Les deux projections d'un point sont toujours, avec les deux projetantes, dans un plan perpendiculaire à l'axe, donc, après rabattement de P_3 *sur* P_1 *ou de* P_3 *sur* P_2, *les deux projections* a''' *et* a', a''' *et* a'' *du point* a *de l'espace seront toujours réunies par une perpendiculaire à l'axe.*

Les projections d'une droite sont toujours des droites.

Les traces d'un plan se rencontrent toujours sur l'axe de projection, quelque soit le système de plans de projection que l'on adopte.

Les données d'un problème se composant de points, de droites et de plans, nous appliquerons les changements de plans de projection successivement à un point, à une droite, puis à un plan.

—

Changements de plans de projection appliqués à un point.

---

244. Problème I. *Etant données les deux projections a' et a'' d'un point a sur un système de deux plans rectangulaires* P_1 *et* P_2, *trouver les projections de ce point sur deux plans* P_1 *et* P_3, *rectangulaires aussi, et ayant le plan* P_1 *commun avec le premier système.*

Solution. (**Fig. 163.**) Le plan P_2 étant remplacé par P_3 et le point a ainsi que le plan P_1 étant restés fixes, la première projection a' de a ainsi que sa première hauteur ne changeront pas.

La projection nouvelle a''' sur P_3 sera située au-dessus du nouvel axe à une distance $a'''m = aa' = a''n =$ la deuxième ordonnée du point a.

En rabattant P_3 sur P_1 on voit : (**Ep. 164.**)

1° Que la première projection a' du point a n'a pas changé ;

2° Que la nouvelle projection a''' sur P_3 est liée à a' par une perpendiculaire au nouvel axe de projection ;

3° Que la troisième ordonnée est égale à la deuxième ordonnée du point a, et que c'est cette distance qui séparera la nouvelle projection a''' du nouvel axe.

245. Problème II. *Etant données les deux projections a' et a'' d'un point a sur deux plans rectangulaires* P_1 et P_2, *trouver les nouvelles projections de ce point sur un nouveau système de plans rectangulaires* P_2 P_3, *ayant avec le premier système le plan* P_2 *commun.*

Solution (**Fig. 165.**) La deuxième projection a'' ne change pas ; elle se trouve avec la nouvelle projection a''' dans un plan perpendiculaire au nouvel axe et par suite, après le rabattement de P_3 sur P_2, on voit : (**Ep. 166.**)

1° Que la deuxième projection a'' du point a n'a pas changé ;

2° Que la troisième projection a''' sur P_3 est liée à la deuxième projection a'' par une perpendiculaire au nouvel axe ;

3° Que la troisième ordonnée est égale à la première ordonnée du point a, et que c'est cette distance qui séparera la nouvelle projection a''' du nouvel axe (*).

246. Problème III. *Ayant construit les projections a' et a''' d'un point a sur un système de plans rectangulaires* P_1 P_3, *trouver les projections sur un nouveau système* P_4 P_3, *ayant avec* $P_1 P_3$ *le plan* P_3 *commun.*

Les problèmes I et II nous prouvent que la projection a''' ne change pas, que la projection a'''' est liée à a''' par une perpendiculaire au nouvel axe A_2, et que la distance de a'''' à A_2 est égale à la distance de a' à l'ancien axe A_1.

De ce qui précède, nous pouvons déduire une loi qui régit les changements de plans de projection appliqués à un point :

Règle pratique. *Si les projections d'un point sur un système de plans rectangulaires sont données, pour avoir les projections de ce même point sur un autre système de plans rectangulaires, ayant avec le premier système un plan commun, il faut opérer comme suit :*

La projection sur le plan commun ne change pas. De cette projection on abaisse une perpendiculaire sur le nouvel axe de projection, et l'on porte sur cette perpendiculaire, et à partir de cet axe, une longueur égale à la distance de la projection qui disparaît à l'ancien axe qui disparaît également.

Le sens dans lequel cette ordonnée doit se porter est indiqué par son signe.

247. Notations. La projection du point a sur un nouveau plan P_3, P_4 etc. se marque par a''', a'''' etc.

Le nouvel axe, trace de P_3 sur P_2 ou sur P_1, se marque, comme l'ancien axe, par un trait fin accompagné du signe $\left\{\begin{matrix}P_2\\P_3\end{matrix}\right.$ ou $\left\{\begin{matrix}P_3\\P_1\end{matrix}\right.$.

Un trait fin et droit marqué $\left\{\begin{matrix}P_4\\P_3\end{matrix}\right.$ indique un axe de projection qui sépare les deux plans de projection rectangulaires P_4 et P_3.

(*) Dans les problèmes des §. § 244 et 245, nous avons désigné le nouveau plan de projection par P_3, malgré que ce nouveau plan remplace P_2 dans §. 244 et P_1 dans §. 235. On fera bien de remarquer, pour éviter toute confusion dans les notations, que P_3 n'indique pas le même plan dans les deux problèmes et qu'il doit toujours être accompagné d'un autre plan pour former un système de plans de projection. Dès lors les deux systèmes P_1 P_3 et P_2 P_3 nous disent suffisamment que dans le premier P_3 remplace P_2 et que dans le second c'est P_1 qui a été remplacé par un plan perpendiculaire à P_2 et que l'on nomme P_3.

Changements de plans de projection appliqués à une droite.

248. Problème IV. *Etant données les projections d'une droite sur un système de plans perpendiculaires* P_1 P_2, *trouver les projections de cette droite sur un nouveau système de plans rectangulaires* P_1 P_3, *ayant avec le premier le plan* P_1 *commun.*

Solution. (**Ep. 167.**) Les projections d'une droite sont déterminées par les projections de deux points quelconques de cette droite. On n'a donc qu'à considérer deux points de la droite et leur appliquer le problème I (**244**).

249. Problème V. *Etant données les projections d'une droite sur un système de plans rectangulaires* P_1 P_2, *trouver les projections de cette droite sur un nouveau système de plans rectangulaires* P_3 P_2, *ayant avec le premier le plan* P_2 *commun.*

Solution. (**Ep. 168.**) On appliquera à deux points de la droite la solution du problème II (**245**).

250. Problème VI. *Ayant construit les projections d'une droite sur un système de plans rectangulaires* P_1 P_3, *trouver les projections de cette droite sur un nouveau système de plans rectangulaires* P_4 P_3, *ayant avec le premier le plan* P_3 *commun.*

Solution. (**Ep. 169.**) On appliquera à deux points quelconques de la droite le problème III (**246**).

Remarque. La loi générale qui régit les changements de plans de projection pour un point s'applique également aux changements de plans de projection pour une droite.

Changements de plans de projection appliqués à un plan.

251. Problème VII. *Etant données les traces* t_1 *et* t_2 *d'un plan* t *sur un système de deux plans rectangulaires* P_1 P_2, *trouver les traces de ce plan sur un nouveau système de plans rectangulaires* P_1 P_3, *ayant avec le premier le plan* P_1 *commun.*

Solution. (Fig. 170.) La nouvelle trace t_3 du plan t est la droite d'intersection du plan t avec P_3. Cette intersection passe par m, point de rencontre du nouvel axe A_1 avec la trace t_1 du plan, et par un deuxième point v, point de rencontre de la trace t_2 du plan t avec la trace sur P_1 du nouveau plan P_3.

Ce point v se trouve donc sur la perpendiculaire élevée à l'ancien axe au point où cet axe est rencontré par le nouvel axe A_1.

En rabattant P_3 sur P_1, le point v viendra en v''', la trace t_3 sera mv''' et la longueur $v'v''' = v'v''$. (**Ep. 171.**)

Donc, *pour trouver la trace t_3 du plan t sur un nouveau plan de projection P_3 perpendiculaire à P_1, on prolonge le nouvel axe A_1 jusqu'à la rencontre de t_1 en m et de l'ancien axe en v'. En v' on élève une perpendiculaire à A_1, et l'on porte sur cette perpendiculaire la longueur $v'v''$. Les points v''' et m déterminent $mv''' = t_3$, troisième trace cherchée du plan donné t.*

252. Problème VIII. *Etant données les traces t_1 et t_2 d'un plan t sur un système de deux plans rectangulaires P_1 et P_2, trouver les traces de ce plan sur un nouveau système de plans rectangulaires P_2 P_3, ayant avec le premier le plan P_2 commun.*

Solution. (Fig. 172.) La nouvelle trace t_3 du plan t sera la droite suivant laquelle P_3 rencontre t. Cette droite passe par m, point de rencontre de la trace t_2 qui ne change pas avec le nouvel axe A_1, et par un deuxième point v situé à la rencontre des plans t et P_3 sur P_1.

Or, ce point est à une distance $v''v'$ du plan P_2, et par suite, en rabattant P_3 avec v sur P_2 qui est fixe, le point v''' restera toujours à la distance $v''v$ du nouvel axe. $v''m$ sera la nouvelle trace t_3 du plan t sur P_3.

(**Ep. 173.**) Donc, *pour trouver la nouvelle trace t_3 du plan t sur un nouveau plan de projection P_3 perpendiculaire à P_2, on prolonge le nouvel axe A_1 jusqu'à la rencontre de l'ancien axe A en v'' et de la trace fixe t_2 du plan t. En v'' on élève sur A_1 une perpendiculaire $v''v''' = v''v'$; v''' et m déterminent la trace t_3 du plan sur le nouveau plan de projection.*

253. Problème IX. *Ayant construit les traces t_1 et t_3 du plan* *t sur un système de deux plans rectangulaires* P_1 *et* P_3, *trouver les traces de ce plan sur un nouveau système de plans rectangulaires* P_3 P_4, *ayant avec le premier système le plan* P_3 *commun.*

Solution. D'après les deux problèmes précédents, on prolongera le nouvel axe A_2 jusqu'à la rencontre en n avec t_3 et en w avec A_1. En w on élève une perpendiculaire à A_2 et une autre à l'ancien axe A_1, et l'on prolonge cette dernière jusqu'à la trace t_1 en z. Sur la première perpendiculaire, et à partir de w, on porte $wy = wz$, et la ligne yn sera la trace t_4 du plan t sur P_3.

Des trois problèmes précédents nous déduirons facilement la loi générale suivante qui régit les changements de plans de projection appliqués à un plan :

Règle pratique. *Pour avoir les traces d'un plan sur un nouveau système de plans de projection, ayant avec le système donné un plan commun, on prendra pour nouvel axe de projection la trace du plan nouveau sur le plan commun aux deux systèmes. On prolonge cet axe jusqu'à la rencontre avec l'ancien axe en v et avec la trace fixe du plan donné en n. Au premier point de rencontre v on élève une perpendiculaire à l'ancien axe et on la prolonge jusqu'à la trace mobile du plan, la trace à remplacer. Cette hauteur on la porte sur la perpendiculaire élevée en v au nouvel axe. L'extrémité y de cette perpendiculaire jointe au point n, donne une droite qui est la nouvelle trace du plan donné sur le plan de projection nouveau non commun aux deux systèmes.*

Applications. — Problèmes.

254. Généralités. Dans la solution des problèmes par la méthode des changements de plans de projection, il est très-utile de savoir immédiatement prévoir quelle est la position la plus favorable des données par rapport aux plans de projection. Un certain coup d'œil qui s'acquiert par l'habitude fera de suite décider du choix des plans à adopter suivant le cas qui se présente. Cette méthode de résoudre les problèmes rend des services réels dans quelques cas de pénétration des corps et dans des problèmes de la théorie des ombres. Nous exposerons, pour chaque problème fondamental, les raisons qui nous guident dans le choix des nouveaux plans de projection et nous considérons les quelques problèmes qui les suivent ainsi que les cas particuliers comme des exercices de cette méthode de solution.

255. Problème I. *Un plan quelconque étant donné par ses deux traces sur* P_1 *et* P_2, *faire en sorte qu'il devienne plan de projection.*

Solution. Si le plan donné s devient plan de projection, il faut qu'il soit perpendiculaire à un autre plan qui, avec lui, forment le système des deux plans rectangulaires.

Soit P_1 P_2 le premier système donné.

On prendra pour deuxième système de plans de projection les plans P_1 et P_3, P_3 étant perpendiculaire à P_1 et normal à la première trace s_1 du plan s. Le nouvel axe A_1 est donc perpendiculaire à s_1.

On prendra ensuite pour nouveau système de plans de projection les plans P_3 et S. Ces deux plans sont rectangulaires et donneront pour nouvel axe A_2, la nouvelle trace s_3 de s sur P_3.

256. Problème II. *Construire la véritable longueur d'une droite limitée à deux de ses points.*

Solution dans l'espace. Nous prendrons pour nouveau système de plans de projection les plans P_1 et P_3, P_3 étant parallèle à la droite ou passant par la droite.

Dans ce système, la nouvelle projection d''' de d sur P_3 sera la véritable longueur de cette droite.

Solution graphique. (Ep. 174.) Le nouvel axe A_1 sera parallèle à d' où se confondra avec cette ligne.

La projection d''' de d sur P_3 s'obtient en construisant les nouvelles projections a''' et b''' de deux points a et b de cette ligne (**248**).

Remarque. L'inspection de l'épure nous montre que d''' ou a''' b''' est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont l'un des côtés de l'angle droit est $a'b'$ et l'autre la différence des premières hauteurs des points a et b.

257. Cas particuliers et exercices. *Construire la vraie grandeur d'une droite limitée à deux de ses points :*

1° Lorsque les deux projections se coupent sur l'axe.

2° Lorsque la droite est située dans le quatrième angle dièdre.

3° Lorsqu'elle est située en partie dans deux dièdres différents.

4° Lorsqu'elle est située dans un plan de profil et qu'elle est connue par deux de ses points.

Problème. *Sur une droite donnée, à partir d'un point donné, porter une longueur donnée.*

Solution. On prend pour nouveau système de plans de projection les plans P_3 et P_1, P_3 étant parallèle à la droite.

Exercices. Sur une droite limitée, donnée par ses projections, trouver un point :

1° Egalement éloigné des extrémités de la droite ;

2° Au tiers de cette ligne ;

3° Dont les distances aux deux extrémités soient dans un rapport donné.

258. Problème III. *Construire la distance d'un point à un plan.*

Solution dans l'espace. Si le plan donné s est perpendiculaire à P_2, la distance du point à ce plan s sera parallèle à P_2 et se projette sur P_2 suivant sa véritable longueur.

Pour ramener le cas général à ce cas particulier favorable, il suffit de prendre pour nouveau système de plans de projection celui formé par P_1 et P_3, P_3 étant perpendiculaire à la première trace s_1 du plan donné.

Solution graphique. (Ep. 175.) Le nouvel axe A_1 sera perpendiculaire à s_1.

La nouvelle trace s_3 du plan s'obtient par les constructions du §. 251 et la projection nouvelle a''' du point à l'aide du §. 244.

Dans ce nouveau système de projections, la distance du point a au plan s se projette sur P_3 suivant sa véritable longueur $a'''b'''$ et suivant la perpendiculaire abaissée de a''' sur s_3 (**58**).

La projection $a'b'$ sera parallèle à l'axe.

Vérifications. La deuxième projection $a''b''$ est perpendiculaire à s_2, et il faut que les ordonnées des points a'' et b'' par rapport à l'axe A soient les mêmes que les ordonnées des points a''' et b''' par rapport au nouvel axe A_1 (**244**).

259. Exercices et cas particuliers. *Construire la distance d'un point à un plan :*

1° Le plan est parallèle à l'axe de projection ;

2° Le plan est déterminé par l'axe et par un point ;

3° Le plan est perpendiculaire au plan bissecteur B_2 ; ses deux traces sont en ligne droite.

260. Problème IV. *Trouver le point de rencontre d'une droite d avec un plan s.*

Solution dans l'espace. Si la droite d était située dans P_2, le point de rencontre de la droite avec le plan s serait à la rencontre de d'' avec s_2.

Pour ramener le cas général qui nous occupe à ce cas particulier favorable, il suffit de prendre pour nouveau système de plans de projection celui des deux plans P_1 et P_3, P_3 passant par la droite d.

Solution graphique. (Ep. 176.) Le nouvel axe A_1 sera la première projection d' de la droite donnée d.

On détermine la nouvelle trace s_3 du plan donné (**251**) ainsi que la nouvelle projection d''' de la droite (**248**).

Le point c''' sera la troisième projection du point de rencontre de la droite d avec le plan s.

Les anciennes projections c' et c'' de ce point sont sur d' et d'', et il faut que la hauteur de c'' au-dessus de l'axe A soit égale à la hauteur du point c''' au-dessus du nouvel axe A_1.

261. Problème V. *Construire la distance d'un point à une droite d.*

Solution dans l'espace. Si la droite d était parallèle à P_2 ou située dans ce plan, la distance du point donné à cette droite devrait se projeter sur P_2 suivant une perpendiculaire à d'' (**49**).

On trouverait donc facilement les deux projections de cette distance et par suite sa véritable longueur.

Solution graphique. (Ep. 177.) On prendra pour nouveau système de plans rectangulaires les plans P_1 et P_3, P_3 normal à P_1 et passant par d. Le nouvel axe A_1 sera donc la première projection d' de la droite d.

On détermine la nouvelle projection d''' de la droite (**248**) et la nouvelle projection a''' du point (**244**).

La distance demandée aura $a'''f'''$ pour troisième projection, $a'f'$ pour la première et $a''f''$ pour la deuxième.

Vérification. Les hauteurs des points a'' et f'' au-dessus de l'axe A sont égales aux hauteurs des points a''' et f''' au-dessus de A_1.

262. Exercices et cas particuliers. I. *Construire la distance d'un point donné :*

1° A l'axe ;

2° A une parallèle à l'axe.

II. *Construire la distance d'un point de l'axe à une droite quelconque.*

263. Problème VI. *Vérifier si deux droites, dont les projections sont données, sont perpendiculaires.*

Solution dans l'espace. La simple inspection des projections de deux droites accuse leur perpendicularité, si l'une de ces lignes est parallèle à l'un des plans de projection.

Pour ramener le cas général à ce cas particulier favorable, il suffit de prendre pour nouveau système de plans de projection celui formé par P_1 et P_3, P_3 étant parallèle à l'une des droites ; ce qui revient à prendre pour nouvel axe A_1 la première projection de cette droite.

Solution graphique. (Ep. 173.) On prendra pour nouvel axe A_1 la première projection d' de la droite d, et l'on construit les troisièmes projections e''' et d''' des deux droites données e et d (**248**).

Les droites d et e de l'espace se rencontrent sous un angle droit si, dans l'épure, l'angle formé par d''' et e''' est droit.

264. Problème VII. *Vérifier si un polygone donné est plan, c'est-à-dire, si tous ses côtés sont situés dans un même plan.*

Solution dans l'espace. Toute figure plane se projette suivant une ligne droite sur un plan perpendiculaire au plan de cette figure.

Coupons le polygone par un plan parallèle à P_1. Ce plan coupera deux côtés quelconques en deux points qui déterminent une droite ab. Si le polygone est plan, cette droite est tout entière dans le plan du polygone, et celui-ci se projette dès lors suivant une ligne droite sur un plan de projection nouveau perpendiculaire à ab.

Solution graphique. (Ep. 179.) Le polygone $a\,c\,d\,e\,f\,g$ sera coupé par le plan h parallèle à P_1. Ce plan coupe deux côtés aux points a et b. On prendra pour nouveau système de plans de projection les deux plans P_1 et P_3, P_3 étant perpendiculaire à ab. Le nouvel axe A_1 sera par conséquent perpendiculaire à la projection $a'b'$ de ab sur P_1.

On construit les nouvelles projections $a'''\ b'''.....\ g'''$ de tous les sommets du polygone (**244**). Celui-ci sera plan, si les nouvelles projections de ses sommets sont en ligne droite.

265. Problème VIII. *Mener un plan parallèle à un plan donné* s, *et qui en soit distant d'une longueur donnée* h.

Solution dans l'espace. Si le plan s est perpendiculaire à P_2, toute perpendiculaire à s se projettera sur P_2 suivant une perpendiculaire à s_2. Cette disposition favorable faciliterait la solution du problème, car on n'aurait qu'à élever en un point de s_2 une perpendiculaire à cette ligne et la prendre égale à h. L'extrémité de h serait un point de la deuxième trace du plan demandé.

Pour ramener le cas général à ce cas particulier, on prendra pour système de plans de projection celui formé par les deux plans P_1 et P_3, P_3 étant perpendiculaire à s_1.

Solution graphique. (Ep. 180.) On prendra pour nouvel axe A_1 une droite perpendiculaire à s_1 et l'on construit la nouvelle trace s_3 du plan donné (**251**). En un point quelconque de cette trace on mène une perpendiculaire que l'on prend égale à h et par m, extrémité de h, passera t_3, trace sur P_3 du plan demandé parallèle à s. Sa première trace sera t_1, parallèle à s_1 et sa deuxième trace la ligne t_2 parallèle à s_2.

266. Problème IX. *Vérifier si une droite donnée* d *est parallèle à un plan donné* s.

Solution dans l'espace. Si le plan donné est perpendiculaire à P_2, la simple inspection de la projection de la droite sur P_2 suffit pour reconnaître le parallélisme du plan et de la droite d. En effet, dans ce cas, la projection d'' est parallèle à s_2.

On ramènera le cas général à ce cas particulier, en prenant pour nouveau système de plans de projection celui formé par les plans P_1 et P_2, P_3 étant perpendiculaire à s_1.

Solution graphique. (**Ep. 181.**) On prendra pour nouvel axe de projection la ligne A_1 perpendiculaire à s_1, et l'on construit la nouvelle trace s_3 du plan s ainsi que la nouvelle projection d''' de la droite d.

Si d''' est parallèle à s_3, la droite de l'espace d est parallèle au plan donné s.

Deuxième solution. On coupe le plan donné par le premier plan projetant de d. La droite d est parallèle à s si la droite d'intersection du plan projetant avec s est parallèle à d.

Cette solution se simplifie si l'on prend pour nouveau système de plans de projection celui formé par les plans P_1 et P_3, P_3 étant le premier plan projetant de d.

On prendra donc pour nouvel axe A_1 la première projection d_1 de la droite d, et l'on construit la nouvelle trace s_3 du plan s ainsi que la nouvelle projection d''' de la droite d.

La droite d est parallèle au plan s si d''' est parallèle à s_3.

268. Problème X. *Construire l'angle d'un plan avec le premier plan de projection* P_1.

Solution dans l'espace. Si le plan donné s était perpendiculaire à P_2, l'angle de s avec P_1 aurait pour angle plan correspondant l'angle de la deuxième trace s_2 du plan s avec l'axe de projection.

Pour ramener le cas général à ce cas particulier, on prendra pour nouveau système de plans de projection celui formé par les deux plans P_1 et P_3, ce dernier étant perpendiculaire à s_1.

Solution graphique. (**Ep. 182.**) On prendra pour nouvel axe de projection la droite A_1 perpendiculaire à s_1 et l'on construira la nouvelle trace s_3 du plan.

L'angle aigu formé par s_3 et A_1 est l'angle plan qui mesure le dièdre dont les deux faces sont P_1 et le plan donné s.

269. Problème XI. *Construire l'angle d'un plan avec le deuxième plan de projection* P_2.

Solution dans l'espace. Si le plan s était perpendiculaire à P_1, l'angle plan formé par s_1 et l'axe mesurerait le dièdre formé par s et P_1.

Pour ramener le cas général à ce cas particulier, il suffit de prendre pour nouveau système de plans de projection celui des deux P_2 et P_3, P_3 étant perpendiculaire à s_2.

Solution graphique. **(Ep. 183.)** On prendra pour nouvel axe de projection la ligne A_1 perpendiculaire à s_2, et l'on construira la nouvelle trace s_3 de s (**251**). L'angle formé par s_3 et A_1 est l'angle plan correspondant du dièdre formé par s et P_2.

270. Problème XII. *Construire l'angle de deux plans.*

Solution dans l'espace. Le cas le plus simple de ce problème est celui où les deux plans donnés sont tous les deux perpendiculaires à l'un des plans de projection ; l'angle des deux traces des plans, sur ce plan de projection, sera l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans donnés.

Pour ramener le problème à ce cas particulier, il faudrait prendre pour nouveau système de plans de projection un système de plans, dans lequel devrait figurer un plan perpendiculaire à chacun des deux plans donnés s et t, donc perpendiculaire à leur intersection commune. Comme ce plan, en général, est oblique à chacun de deux plans P_2 et P_1 et, comme dans tout changement de plans de projection, le système de plans de projection nouveau doit avoir un plan commun avec le système ancien qu'il remplace, on devra, dans ce problème, opérer d'abord un premier changement de plans de projection.

On prendra pour premier système nouveau de plans de projection celui formé par les deux plans P_1 et P_3, P_3 passant par l'intersection commune des deux plans, ce qui revient à prendre pour nouvel axe la première projection de cette droite d'intersection des deux plans.

Après avoir opéré ce changement, et déterminé la nouvelle trace commune s_3t_3 des deux plans, trace qui sera la troisième projection de la droite d'intersection des deux plans, on prendra pour deuxième système nouveau de plans de projection celui formé par P_3 et P_4, P_4 étant perpendiculaire à la trace commune s_3t_3 des deux plans proposés. Le nouvel axe A_2 sera donc perpendiculaire à cette ligne.

Les traces des deux plans sur le nouveau plan de projection P_4 formeront entre elles un angle qui sera l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans donnés.

Solution graphique. (Ep. 184.) Premier changement. On prendra pour nouvel axe A_1 la projection d' de la droite d'intersection des deux plans s et t.

Les nouvelles traces des deux plans sur le nouveau plan P_3 se confondent et n'en forment qu'une seule s_3t_3.

Deuxième changement. On prendra pour nouvel axe A_2 une droite perpendiculaire à $s_3\,t_3$ et l'on construira les traces nouvelles s_4t_4 des deux plans donnés sur le nouveau plan P_4 (**253**). La trace s_3t_3 sera perpendiculaire au nouvel axe et les deux plans le sont à P_4.

L'angle formé par les nouvelles traces s_4 et t_4 sera l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans donnés.

271. Exercices et cas particuliers. Résoudre, par la méthode des changements de plans de projection, les dix cas particuliers que comporte le problème de l'angle de deux plans et qui se trouvent énoncés au §. 223.

272. Problème XIII. *Construire la plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan.*

Solution dans l'espace. Soient les deux droites d et e. Le cas le plus simple de ce problème est le suivant : La droite e est perpendiculaire à l'un des plans de projection, la droite d est quelconque. Dans ce cas, la plus courte distance, qui est perpendiculaire à e, sera parallèle au plan de projection et se projettera sur ce plan suivant une perpendiculaire à la projection de d (**49**).

Pour ramener le cas général à ce cas particulier, le système des plans de projection P_1 et P_2 devra être changé, et dans le nouveau système un des plans devra être normal à la droite e.

Comme un tel plan, en général, est oblique par rapport à chacun des deux plans P_1 et P_2 qui constituent l'ancien système de plans de projection, et comme tout nouveau système que l'on adopte doit avoir un plan commun avec l'ancien système qu'il doit remplacer, il faut, dans ce problème, opérer d'abord un premier changement.

On prendra pour premier système nouveau les deux plans P_1 et P_3, P_3 étant le premier plan projetant de la droite e. Par suite de ce changement, e' sera devenu le nouvel axe A_1 et la droite e sera située dans P_3 et aura une troisième projection nouvelle e'''.

Après avoir opéré ce changement, on adoptera un deuxième système nouveau formé par les plans P_3 et P_4, P_4 étant perpendiculaire à e'''. La droite e sera dans P_3 ; elle sera perpendiculaire à P_4 et dans ces conditions favorables, le problème général se simplifiera comme il a été exposé ci-dessus.

Solution graphique. (Ep. 185.) Premier changement. Le nouvel axe A_1 sera la première projection e' de la droite e. On déterminera les nouvelles projections e''' et d''' des deux droites sur P_3.

Deuxième changement. Le nouvel axe A_2 sera perpendilaire à e'''. La nouvelle projection de e sur P_4 se réduira à un point e''''.

Dans ces nouvelles projections, la plus courte distance se projette sur P_4 suivant la droite f'''', droite perpendiculaire à d'''' et passant par le point e''''. La projection sur P_3 sera f''' parallèle à l'axe A_2.

La véritable longueur f sera égale à f'''' et ses projections dans le système P_1P_2 sont f' et f''.

Chapitre IX.

—

Méthode des rotations.

—

273. Considérations générales. Définitions. Le but des rotations est de ramener les données d'un problème dans une position favorable par rapport aux plans de projection considérés comme fixes, afin de simplifier les constructions graphiques (**242**).

Les éléments qui constituent les données du problème sont invariablement reliés entre eux et à un axe fixe autour duquel on les fait tourner. Cet axe est l'**axe de rotation.**

Aucun élément ne peut se déplacer sans entraîner l'ensemble des données dans son mouvement.

Loi du mouvement. Dans ce mouvement de rotation autour de l'axe de rotation :

1° *Chaque point décrit un arc de cercle, dont le plan est perpendiculaire à l'axe, dont le centre est sur cet axe, et dont le rayon est égal à la distance du point mobile à l'axe.*

2° *Chaque point du système des données se déplace sur l'arc qu'il décrit, et l'arc parcouru est mesuré par l'angle des perpendiculaires abaissées des positions initiale et finale du point mobile sur l'axe de rotation. Cet angle est l'***angle de rotation** ; *il sera désigné par* φ.

3° *L'angle de rotation est le même pour tous les points du système des données.*

274. Choix de l'axe de rotation. Le but des rotations étant de parvenir à la position particulière des données qui permet de simplifier les constructions graphiques que nécessite la solution d'un problème, on ne peut prendre pour axes de rotation que des droites perpendiculaires à l'un de plans de projection, ou parallèles à l'axe de projection.

Dans le cas d'un axe normal à P_1 ou à P_2, les arcs se projettent en véritable grandeur sur P_1 ou sur P_2.

Si l'axe est parallèle à l'axe de projection, les arcs décrits se projettent en véritable grandeur sur un plan P_3 perpendiculaire à l'axe de projection.

Parfois on prend pour axe une droite de P_1.

Etudions donc les différents cas suivants qui peuvent se présenter :

$$\text{Rotation} \left\{ \begin{array}{l} \text{d'un point} \\ \text{d'une droite} \\ \text{d'un plan} \end{array} \right\} \text{autour d'un axe} \left\{ \begin{array}{l} \text{perpendiculaire à } P_1 \,; \\ \text{perpendiculaire à } P_2 \,; \\ \text{parallèle à l'axe de projection.} \end{array} \right.$$

Remarque. Les rabattements autour de l'une des traces d'un plan, ou autour d'une parallèle à ces traces, constituent de véritables rotations, en tant que l'on fait opérer une rotation à des éléments *situés dans un même plan et autour d'un axe situé dans ce plan.*

—

Rotation d'un point.

—

275. L'axe de rotation est perpendiculaire à P_1.

Problème. *Faire tourner un point donné autour d'un axe perpendiculaire à* P_1, *et construire les nouvelles projections de ce point.*

Solution. (Ep. 186.) Le point a décrira un arc de cercle, dont le plan est parallèle à P_1 et dont le centre est en m sur l'axe ω. Le rayon de cet arc est $a'm'$, véritable longueur de la distance du point a à l'axe ω.

Si φ est l'angle de rotation, comme l'arc de rotation est parallèle à P_1, on n'a qu'à construire en m' sur $a'm'$ un angle $a'm'a'_1 = \varphi$ et a'_1, point de rencontre du côté $m'a'_1$ de cet angle φ avec l'arc de rotation, sera la première projection de la nouvelle position du point a.

La nouvelle projection a''_1 sur P_2 se trouvera sur la parallèle à l'axe de projection menée par a'' (la deuxième projection de l'arc décrit), et sur la normale à l'axe de projection abaissée de a'_1.

276. L'axe de rotation est perpendiculaire à P_2.

Problème. *Faire tourner un point donné autour d'un axe perpendiculaire à* P_2, *et construire les nouvelles projections de ce point.*

Solution. (Ep. 187.) D'après le raisonnement du §. 275 on voit, qu'on n'a qu'à décrire dans P_2, de m'' comme centre avec $m''a''$ pour rayon un arc de cercle, construire en m'' sur $a''m''$ l'angle de rotation φ, pour avoir en a''_1 la projection sur P_2 de la nouvelle position du point a.

La nouvelle projection sur P_1 se trouvera en a'_1 sur la parallèle à l'axe de projection menée par a'.

Remarque. Dans les deux cas précédents et dans ceux qui suivent, la rotation peut se faire à gauche ou à droite de la position primitive du point mobile.

277. L'axe de rotation est parallèle à l'axe de projection.

Problème. *Faire tourner un point donné autour d'un axe de rotation parallèle à l'axe de projection, et déterminer les nouvelles projections de ce point.*

Solution. (Ep. 188.) Si l'axe ω est parallèle à l'axe de projection, les arcs de rotation se projettent en véritable longueur sur un nouveau plan P_3 perpendiculaire à l'axe de projection.

Opérons un changement de plans de projection et passons du système P_1P_2 au système P_1P_3. Dans ce nouveau système, l'axe ω est perpendiculaire à P_3 et par suite, si φ est l'angle de rotation, la nouvelle position de a après la rotation est accusée par les projections a'''_1 et a'_1 (**275** et **276**). Les projections sur P_1 et P_2 de la nouvelle position a_1 du point seront a'_1 et a''_1. (Voir les changements de plans de projection.)

278. L'axe de rotation est une droite quelconque de P_1. La rotation s'effectuera autour de ω, droite de P_1, donc dans un plan perpendiculaire à P_1. Rabattons ce plan de rotation sur P_1, en prenant sa trace-projection $a'm$ pour axe. Le point a se rabat en (a)

(**182**), et la vraie distance du point a de l'espace à l'axe de rotation sera $m(a)$. Si φ est l'angle de rotation, le rabattement sur P_1 de la nouvelle position de a, après la rotation, sera en (a_1) ; en relevant ce point dans le plan de rotation, nous aurons, pour projections de la nouvelle position a_1 du point, les positions a'_1 et a''_1.

—

Rotation d'une droite.

—

279. L'axe de rotation est perpendiculaire à P_1.

Problème. *Faire tourner une droite autour d'un axe de rotation perpendiculaire à* P_1, *et déterminer les projections de la nouvelle position de cette droite.*

Solution. (**Ep. 189.**) La nouvelle position de la droite est déterminée par les nouvelles positions de deux de ses points (**275**).

Un seul point suffit, si la droite est parallèle à l'axe ou si elle le rencontre. Le point de rencontre de la droite avec l'axe appartient, en effet, à la droite dans toutes les positions que celle-ci peut occuper.

Le cas le plus général est celui où la droite et l'axe ne sont pas dans un même plan.

Soit d la droite donnée. Prenons, sur cette droite, le point a qui est le plus rapproché de l'axe de rotation ω. Ce point se projette sur P_1 au point de rencontre de d' avec la perpendiculaire qui mesure la plus courte distance entre d et l'axe (**170**); la projection d' de la droite sera tangente, en ce point, à l'arc de cercle décrit de m comme centre avec ma' pour rayon. Si la droite se déplace, chaque point se déplacera de la même quantité angulaire, φ par exemple; le point a aura le même mouvement et se trouvera, à la fin de celui-ci, en a_1, point qui se projette sur P_1 en a'_1; l'angle $a'ma'_1$ est égal à φ. Comme ce point est toujours resté à la même distance de l'axe, il se trouvera toujours être le plus rapproché de cet axe et, par suite, la nouvelle position de la droite sera tangente en a'_1 à l'arc de cercle décrit de m comme centre avec ma' pour rayon, ma' étant la plus courte distance de d à l'axe.

Un seul point suffit donc toujours pour déterminer la nouvelle position de la droite.

Vérifications. Prenons, sur la droite d, deux points c et b, à égale distance de l'axe, donc des points qui se projettent sur P_1 en c' et b', points appartenant à la circonférence de cercle décrite de m comme centre avec mc' pour rayon.

Ces points, après la rotation mesurée par l'angle φ, se trouveront en c_1 et b_1, et se projettent sur P_1 en c'_1 et b'_1, et sur P_2 en c''_1 et b''_1.

Les trois points a_1 b_1 c_1 seront en ligne droite dans les deux projections, et cette droite est projetée sur P_1 en $b'_1a'_1c'_1$, tangente, en son milieu a'_1, à la circonférence décrite de m comme centre avec ma' pour rayon.

280. L'axe de rotation est perpendiculaire à P_2.

Problème. *Faire tourner une droite autour d'un axe perpendiculaire à* P_2, *et déterminer les projections de la nouvelle position de cette droite.*

Solution. (Ep. 190.) Les raisonnements du § 279 s'appliquent à ce cas particulier. Les arcs de rotation ont leurs plans parallèles à P_2 et s'y projèttent suivant leur véritable longueur. La projection sur P_2 de la nouvelle position de la droite sera encore tangente à la circonférence de cercle décrite de la trace-projection m de l'axe comme centre, avec la plus petite distance de la droite à l'axe pour rayon.

Ces raisonnements, appliqués au cas général d'une droite se croisant avec l'axe, donnent l'épure (**190**).

L'épure (**191**) représentera la rotation d'une droite parallèle à l'axe et, dans l'épure (**192**), la droite d rencontre l'axe de rotation au point i qui reste fixe.

Remarque. Dans les deux paragraphes précédents, ainsi que dans ceux qui suivent, la rotation de la droite peut se faire à gauche ou à droite de la position primitive de celle-ci.

281. L'axe de rotation est parallèle à l'axe de projection ou coïncide avec ce dernier.

Problème. *Faire tourner une droite autour d'un axe parallèle à l'axe de projection, et déterminer les projections de la droite dans sa nouvelle position.*

Solution. (**Ep. 193.**) Si l'axe de rotation coïncide avec l'axe de projection ou qu'il est parallèle à cet axe, tous les points de la droite se déplacent, de la même quantité angulaire, dans des plans qui sont perpendiculaires à l'axe de projection.

On prendra pour nouveau système de plans de projection celui formé par les plans P_1 et P_3, P_3 étant perpendiculaire à l'axe de rotation.

On détermine les nouvelles projections de l'axe et de la droite donnée sur ce plan, et l'on effectue les opérations de la rotation d'après le § 279.

On n'a qu'à remplacer, dans ce paragraphe, P_1 par P_3. La rotation opérée, des projections des nouvelles positions sur P_3, on passe aux projections correspondantes sur l'ancien système de plans de projection P_1 et P_2. (Voir les changements de plans de projection.)

282. L'axe de rotation est une droite quelconque du plan P_1. On déterminera, comme au § 278, les nouvelles positions de deux points de la droite; elles détermineront la position nouvelle de la droite.

—

Rotation d'un plan.

—

283. L'axe de rotation est perpendiculaire à P_1.

Problème. *Faire tourner un plan autour d'un axe perpendiculaire à* P_1, *et déterminer les traces du plan dans sa nouvelle position.*

Première solution. (**Ep. 194.**) Si le plan s tourne autour de l'axe de rotation, la trace s_1 sur P_1 ne sort pas de P_1; cette trace tournera autour de l'axe et sera, à chaque instant du mouvement, tangente à l'arc de cercle décrit de la trace-projection ω' de l'axe comme centre, avec $\omega' m$ pour rayon.

Prenons, sur cet arc, une longueur *mn* qui mesure la quantité angulaire φ; s'_1, tangente en n à cet arc, sera la nouvelle position de la première trace du plan (**279**).

Une droite quelconque h du plan donné s, située dans un plan parallèle à P_1, ne sortira pas de ce plan pendant le mouvement de rotation; elle se projette sur P_1, à chaque instant du mouvement, suivant une parallèle à la position qu'occupe, à cet instant, la trace s_1 du plan, et suivant une tangente à l'arc de cercle décrit de ω' comme centre, avec la distance de l'axe à cette ligne h pour rayon. Or, cette distance se projette sur P_1 suivant sa véritable longueur en $\omega' r$.

Si cette distance se réduit à zéro, la droite h devient la droite i, toujours parallèle à s_1 dans toutes les positions de cette dernière ligne, et passant toujours, dans sa projection sur P_1, par le point ω'.

De ce qui précède, nous déduisons la règle suivante :

Pour opérer la rotation d'un plan autour d'un axe ω *perpendiculaire à* P_1, *on n'a qu'à abaisser de* ω', *trace-projection de l'axe sur* P_1, *une perpendiculaire sur* s_1, *décrire de* ω' *comme centre, avec* $\omega' m$ *pour rayon, un arc de cercle mesurant l'angle de rotation* φ, *et mener, à l'extrémité n de cet arc, une tangente à ce dernier. Cette tangente* s'_1 *sera la nouvelle position de la trace du plan sur* P_1.

Par la trace-projection ω' *de l'axe, on mène une parallèle à* s'_1; *cette parallèle* i'_1 *sera la projection sur* P_1 *de la nouvelle position d'une droite du plan s parallèle à* P_1. *On détermine la trace de cette droite sur* P_2, *et l'on unit ce point au point de rencontre x de* s'_1 *avec l'axe de projection, pour avoir la nouvelle trace* s'_2 *du plan s sur* P_2.

Seconde solution. (**Ep. 195.**) On coupe le plan s par un plan passant par l'axe de rotation et normal à sa trace s_1.

La droite *ab* obtenue sera une ligne de plus grande pente du plan s sur P_1 et, comme telle, elle sera, dans toutes les positions du plan mobile, perpendiculaire à la trace de ce plan sur P_1 et se projetant sur ce plan suivant une normale à cette trace.

Comme cette ligne *ab* est entraînée dans le mouvement du plan, elle aura tourné autour de l'axe, qu'elle rencontre en b, de la quantité angulaire mesurée par l'angle de rotation φ.

On opère la rotation de la ligne de plus grande pente ab. Par la position nouvelle a'_1 de sa trace sur P_1, on mène la tangente s'_1 à l'arc décrit par a', et l'on aura la nouvelle position de la trace du plan. La nouvelle position de la trace du plan sur P_2 passe par x et par c''_1, trace sur P_2 de la nouvelle position de la ligne de plus grande pente ab.

Remarque. Les deux positions, ancienne et nouvelle, du plan s se coupent suivant une droite passant par z et par b, donc se projetant sur P_1 suivant $z'b'$, bissectrice de l'angle de rotation du plan.

284. L'axe de rotation est perpendiculaire à P_2.

Problème. *Faire tourner un plan autour d'un axe normal à* P_2, *et déterminer les traces du plan dans sa nouvelle position.*

Première solution. (**Ep. 196.**) La nouvelle position de la trace sur P_2 sera en s'_2, tangente en n à l'arc décrit de ω'' comme centre avec ωm pour rayon et mesurant l'angle de rotation φ.

Pour avoir la nouvelle position de la trace du plan sur P_1, on se sert d'une droite du plan s passant par ω'' et parallèle à P_2. (§ 283.) (Mêmes raisonnements en substituant P_2 à P_1.)

Seconde solution. (**Ep. 197.**) On détermine une ligne de plus grande pente du plan s sur P_2. On opère la rotation de cette ligne ab autour de l'axe de rotation, l'angle de rotation étant égal à φ. Les traces du plan s, dans sa nouvelle position, passeront par les traces de même nom de la ligne de plus grande pente dans sa nouvelle position. La trace du plan s sur P_2 est de plus normale à la projection nouvelle de la ligne de plus grande pente du plan sur P_2. (§ 283.) (Mêmes raisonnements en remplaçant P_1 par P_2.)

285. L'axe de rotation est parallèle à l'axe de projection ou coïncide avec ce dernier.

Problème. *Faire tourner un plan autour d'une droite parallèle à l'axe de projection ou se confondant avec cette ligne, et déterminer les traces du plan dans cette nouvelle position.*

Solution. (**Ep. 198.**) On opère un changement de plan de projection, en prenant pour nouveau système celui formé par les plans P_1 et P_3, P_3 étant perpendiculaire à l'axe de projection, donc aussi à l'axe de rotation ω.

Dans ce nouveau système de plans, on opère la rotation du plan s (**284**), et des traces nouvelles s'_3 et s'_1 on remonte aux traces correspondantes dans l'ancien système de plans de projection P_1 et P_2.

Remarque. Les opérations sont identiquement les mêmes si l'axe de rotation coïncide avec l'axe de projection. Le point x sera le centre du cercle auquel les traces, dans leurs positions sur P_3, doivent toujours rester tangentes. Le rayon de ce cercle est la perpendiculaire abaissée de x sur s.

Applications. — Problèmes.

286. Problème I. *Une droite quelconque étant donnée, l'amener dans une position perpendiculaire à* P_1.

Solution. (Ep. 199.) Par une première rotation de la droite d autour de l'axe ω, perpendiculaire à P_1 et rencontrant d au point b, on amène la droite dans la position d_1 parallèle à P_1 (**279**).

L'angle de rotation est égal à φ, angle que fait d' avec une parallèle à l'axe de projection.

Par une nouvelle rotation autour d'un axe ω_1 perpendiculaire à P_2, on amène la droite d_1 parallèle à P_2 dans la position de la perpendiculaire à P_1.

Dans cette rotation, on n'a qu'à décrire de ω''_1, trace-projection du second axe, comme centre, avec $\omega''_1c''_1$ pour rayon un arc de cercle. La tangente d''_2 à cet arc, perpendiculaire à l'axe de projection, sera la projection, sur P_2, de la nouvelle position de la droite (**280**). La projection sur P_1 sera le point c'_2.

287. Problème II. *Un plan t étant donné, l'amener dans une position parallèle à* P_2.

Solution. (Ep. 200.) Par une première rotation autour d'un axe perpendiculaire à P_2, on amène le plan t dans une position t' perpendiculaire à P_1 (**284**).

Par une nouvelle rotation autour d'un axe perpendiculaire à P_1, le plan t' est amené à être parallèle à P_2 (**283**). Ceci arrive dès que la trace t'_1 sur P_1 devient parallèle à l'axe de projection.

Dans ces deux rotations successives, les angles de rotation φ et φ' se déterminent par les conditions mêmes du problème.

288. Problème III. *Construire la véritable longueur d'une droite limitée à deux de ses points.*

Solution dans l'espace. A l'aide d'une rotation autour d'un axe normal à P_1, on amène la droite dans une position parallèle à P_2. La projection de cette nouvelle position de la droite sur P_2 sera la véritable longueur de cette droite.

L'épure de ce problème fait partie de l'épure du § 286.

289. Problème IV. *Construire l'angle d'un plan avec* P_1 *ou avec* P_2.

I. *Angle du plan* T *avec* P_1. **Solution dans l'espace.** On fera tourner le plan P autour d'un axe normal à P_1, jusqu'à ce qu'il soit perpendiculaire à P_2. Le plan T ne fera que changer de place, mais l'angle de T avec P_1 ne changera pas. Cet angle dièdre aura pour angle plan correspondant l'angle de la trace T'_2 de la nouvelle position du plan avec l'axe de projection.

Solution graphique. (**Ep. 201.**) La rotation s'opère autour de l'axe ω perpendiculaire à P_1, et les constructions s'effectuent d'après la seconde solution du § 283.

II. *Angle du plan* T *avec* P_2. **Solution dans l'espace.** On fera tourner le plan T pour l'amener à être normal à P_1. Dans cette nouvelle position, l'angle de sa nouvelle trace T'_1 avec l'axe de projection mesure le dièdre de T avec P_1.

Solution graphique. (**Ep. 202.**) On opère la rotation d'après la seconde solution donnée au § 284.

290. Problème V. *Construire la droite d'intersection de deux plans parallèles à l'axe de projection, ainsi que l'angle de ces deux plans.*

Solution dans l'espace. On fera tourner les deux plans autour d'un axe normal à P_1 situé dans P_2, jusqu'à ce qu'ils soient perpendiculaires à P_2. Dans cette nouvelle position, l'angle des traces des plans sur P_2 sera l'angle correspondant de leur dièdre, lequel angle dièdre n'a pas changé de grandeur pendant le mouvement de rotation.

Solution graphique. (**Ep. 203.**) L'axe de rotation ω est dans P_2 et rencontre les traces S_2 et T_2 en a'' et b'', points qui restent fixes pendant la rotation des deux plans. Cette rotation s'effectue comme au § 283. Les traces des deux plans sur P_2, dans la nouvelle position de ces derniers, donneront l'angle $a''m_1''b''$ pour l'angle du dièdre formé par S et T.

Dans la nouvelle position des plans, la droite d'intersection m se projette sur P_2 au point m''_1, et sur P_1 suivant m'_1 parallèle à T_1.

Cette droite m, ramenée avec les deux plans dans l'ancienne position de ceux-ci, aura pour projections m' et m'' parallèles à l'axe de projection.

291. Problème VI. *Etant donnés deux plans parallèles à l'axe, construire le plan bissecteur de leur angle dièdre.*

Solution. (**Fig. 203.**) On construira, comme au problème précédent, l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans, ainsi que la bissectrice de cet angle.

Le plan bissecteur contient cette bissectrice $c''d'_1$ et ses traces, parallèles à S'_1 et T'_1, passeront par les traces de même nom de la bissectrice.

En ramenant la bissectrice avec les deux plans donnés dans la position primitive de ces derniers, on aura b_2 et b_1 pour traces du plan bissecteur.

292. Problème VII. *Construire la distance d'un point à une droite.*

Solution dans l'espace. Si la droite d était parallèle au plan P_2, la distance du point à cette droite serait projetée sur P_2 suivant une normale à d'', par suite, les deux projections de la distance se construiraient aisément.

Pour amener la droite d dans cette position favorable, on la fera tourner autour d'un axe normal à P_1 et passant par le point donné a.

Solution graphique. (**Ep. 204.**) La rotation autour de l'axe ω perpendiculaire à P_1 et mené par a s'opère comme au § 279 et s'arrête si la droite est parallèle à P_2. Dans cette position, la distance demandée se projette sur P_2 suivant $a''b''_1$ normale à d'_1 et sur P_1 suivant $a'b'_1$.

Cette distance est ensuite ramenée en $a''b''$ et $a'b'$, ancienne position qu'elle occupait avant la rotation.

293. Exercices et cas particuliers. I. *Construire la distance d'un point donné :*

1° A l'axe ;

2° A une parallèle à l'axe.

II. *Construire la distance d'un point de l'axe à une droite quelconque.*

294. Problème VIII. *Construire la distance d'un point à un plan.*

Solution dans l'espace. Si le plan était normal à P_2, la distance demandée se projetterait sur P_2 suivant sa véritable longueur le long de la perpendiculaire abaissée de a'' sur la trace du plan sur P_2.

Pour amener le plan dans cette position favorable, on le fait tourner autour d'un axe normal à P_1 et passant par le point donné.

Solution graphique. (Ep. 205). La rotation du plan T autour de l'axe ω mené par le point a perpendiculairement à P_1 s'opère comme au §. 283 ; elle s'arrête si le plan T est devenu normal à P_2. Dans cette position, la distance du point a au plan T se projette sur P_2 suivant $a''\ b''_1$ normale à T'_2.

$a''b''_1$ est la vraie longueur de la distance demandée.

295. Exercices et cas particuliers. *Construire la distance d'un point à un plan :*

1° Le plan est parallèle à l'axe de projection ;

2° Le plan est déterminé par l'axe et par un point ;

3° Le plan est perpendiculaire au plan bissecteur B_2 ; ses deux traces sont en ligne droite.

296. Problème IX. *Construire l'angle de deux droites.*

Solution dans l'espace. Les deux droites déterminent un plan que l'on fait tourner autour d'un axe perpendiculaire à P_1 et passant par le point de rencontre a des deux droites jusqu'à ce qu'il soit devenu perpendiculaire à P_2. On rabat ensuite ce plan sur P_1.

Solution graphique. (Ep. 206.) On détermine $b'c'$, trace du plan des deux droites sur P_1. On amène $b'c'$ en $b'_1c'_1$ normale à l'axe de projection. Le triangle $a'b'_1c'_1$ contient l'angle demandé, l'angle au sommet a, et aura pour hauteur $a''m''_1$. Le rabattement s'établit donc facilement et $b'_1(a)c'_1$ est l'angle des deux droites.

297. Problème X. *Construire l'angle d'une droite avec* P_1 *puis avec* P_2.

Solution. Pour avoir l'angle de la droite d avec P_1, on fait tourner la droite autour d'un axe ω perpendiculaire à P_1 jusqu'à ce qu'elle soit devenue parallèle à P_2. L'angle de la nouvelle projection sur P_2 avec l'axe de projection sera l'angle que fait d avec P_1. **(Ep. 207.)**

Pour avoir l'angle de la droite d avec P_2, on fera tourner d autour d'un axe perpendiculaire à P_2 jusqu'à ce qu'elle soit parallèle à P_1 ou dans P_1. L'angle de la nouvelle projection sur P_1 avec l'axe de projection sera l'angle de d avec P_2. (**Ep. 208**).

298. Problème XI. *Etant donné un plan t, construire un plan parallèle à t et distant de ce dernier d'une longueur donnée h.*

Solution. (Ep. 209.) Le problème est facilité si le plan t est perpendiculaire à P_2. Dans ce cas, la distance du plan à un plan qui lui est parallèle se projette sur P_2 suivant sa vraie longueur sur la perpendiculaire aux traces de ces plans sur P_2. On fera donc tourner le plan t autour d'un axe ω perpendiculaire à P_1 jusqu'à ce qu'il soit perpendiculaire à P_2.

On mène un plan parallèle à la nouvelle position t' de t et distant de t' de la longueur h. Le plan s' ainsi construit, on le fait tourner autour de ω jusqu'à ce qu'il soit devenu parallèle à t ; dans cette position, le plan s répond aux conditions du problème.

299. Problème XII. *Construire la distance de deux plans parallèles.*

Solution dans l'espace. On fera tourner les deux plans autour d'un axe perpendiculaire à P_1 jusqu'à ce qu'ils soient tous les deux perpendiculaires à P_2. La plus courte distance, dans ces nouvelles positions, se projette sur P_2 suivant sa véritable longueur, égale à la perpendiculaire commune aux deux nouvelles traces des deux plans sur P_2 et comprise entre ces traces.

Solution graphique. La solution graphique est comprise dans l'épure du problème précédent.

300. Problème XIII. *Construire l'angle de deux plans.*

Solution dans l'espace. Le cas le plus favorable pour ce problème est celui où les deux plans t et s ont une trace commune sur P_2 et que cette trace est perpendiculaire à l'axe de projection.

L'angle des deux traces sur P_1 mesurera alors l'angle dièdre des deux plans. Pour ramener le cas général à ce cas particulier, on opérera deux rotations successives.

Solution graphique. (Ep. 210.) Première rotation. On fera tourner les deux plans autour d'un axe perpendiculaire à P_1 et passant par le point a, point de rencontre des deux traces t_2 et s_2. Cet axe est donc dans P_2 et dans le premier plan projetant de l'intersection commune des deux plans t et s. Les deux plans tournent jusqu'à ce que leur intersection commune se trouve dans P_2 en $a''b''_1$. $a''b''_1$ sera la nouvelle trace commune des deux plans sur P_2. s'_1 et t'_1, droites menées par b''_1 et tangentes aux arcs décrits par les traces m et n des lignes de plus grande pente de t et de s, sont les nouvelles traces des deux plans sur P_1.

Deuxième rotation. Les nouvelles positions des deux plans tourneront autour de l'axe V, normal à P_2, jusqu'à ce que leur trace commune $a''b''_1$ soit devenue perpendiculaire à l'axe de projection. L'angle formé par les nouvelles traces s''_1 et t''_1 sur P_1 sera l'angle des deux plans, lesquels sont actuellement perpendiculaires à P_1 et ont une trace commune sur P_2.

301. Problème XIV. *Construire la plus courte distance de deux droites qui se croisent dans l'espace.*

Solution dans l'espace. La position la plus favorable des données de ce problème est la suivante :

Une des deux droites est perpendiculaire à P_1. La plus courte distance se projettera sur P_1 suivant une perpendiculaire à la première projection de la deuxième droite, et sur P_2 suivant une parallèle à l'axe de projection (**170**).

Pour ramener le cas général à ce cas particulier, on doit opérer deux rotations successives. Par un point de la première droite d, sa deuxième trace, on fera passer une droite perpendiculaire à P_1. Cette perpendiculaire sera prise pour premier axe de rotation autour duquel on fera tourner le système des deux droites jusqu'à ce que la droite d soit dans P_2.

Par un point de la nouvelle position de d on mènera une perpendiculaire à P_2, droite que l'on prendra pour deuxième axe de rotation, et autour duquel on fera tourner le système des deux droites, déjà une fois changées de place, jusqu'à ce que la droite d, actuellement dans P_2, devienne perpendiculaire à l'axe de projection et par suite à P_1.

Dans cette nouvelle position des données, la solution du problème se simplifie.

Solution graphique. (Ep. **211**.) **Première rotation.** Le premier axe de rotation ω passe par le point m de d, trace de d sur P_2. On amènera d dans P_2. La deuxième droite e prendra la position correspondante e_1. L'angle de rotation est l'angle que fait d' avec l'axe de projection.

Deuxième rotation. Le deuxième axe de rotation ς passe par le même point m de d et sera perpendiculaire à P_2. On fera tourner le système des deux droites d_1 et e_1 autour de cet axe jusqu'à ce que d_1 soit devenue perpendiculaire à P_1 et que le système des deux droites soit formé par d_2 et c_2.

Dans cette position, la plus courte distance sera a_2b_2.

En faisant retourner le système des deux droites d_2c_2 à sa position précédemment occupée d_1e_1, la plus courte distance viendra en a_1b_1.

En passant de la position d_1e_1 à la position primitive d et e, la plus courte distance viendra en ab. (Voir les §§. 279 et 280). Le problème précédent est une application de ces paragraphes.

Chapitre X.

Applications.

Résolution de l'angle trièdre.

302. Un angle trièdre contient trois angles plans ou faces et trois angles dièdres qui sont mesurés par les angles plans correspondants.

Désignons par α, β et γ les trois faces et par A, B et C les trois dièdres respectivement opposés aux faces α, β et γ.

Trois de ces six éléments étant donnés, on peut se proposer de trouver les trois autres, ce qui s'appelle *résoudre le trièdre*.

Les données de ce problème peuvent être choisies de six manières différentes.

On peut considérer comme données du problème :

1° Les trois faces α, β et γ.

2° Les deux faces β et γ et l'angle dièdre compris A.

3° Les deux faces β et γ et le dièdre B opposé à la face β.

4° Les trois angles dièdres A, B et C.

5° Les deux angles dièdres A et B et la face α opposée au dièdre A.

6° Les deux angles dièdres A et B et la face commune γ.

Démontrons que ces six manières différentes de poser l'énoncé du problème de la résolution de l'angle trièdre peuvent se ramener aux trois premières.

A cet effet, d'un point quelconque pris à l'intérieur du trièdre abaissons une perpendiculaire sur chacune de ses faces ; nous formerons un trièdre supplémentaire du trièdre donné.

Soient A_1, B_1 et C_1 les valeurs des trois angles dièdres, α_1, β_1 et γ_1 celles des trois angles plans de ce trièdre supplémentaire, éléments opposés respectivement aux faces α, β et γ et aux angles dièdres A, B et C du trièdre proposé.

Les propriétés bien connues des trièdres supplémentaires nous donnent les relations :

$A_1 = 180° - \alpha$; $B_1 = 180° - \beta$; $C_1 = 180° - \gamma$.

$\alpha_1 = 180° - A$; $\beta_1 = 180° - B$; $\gamma_1 = 180° - C$.

Quatrième cas. *Etant donnés les trois angles dièdres* A, B *et* C, *construire les trois faces* α, β et γ.

La considération du trièdre supplémentaire nous donne :

$A = 180° - \alpha_1$; $B = 180° - \beta_1$ et $C = 180° - \gamma$.

Donc, les trois dièdres A, B et C étant connus, les trois faces α_1, β_1 et γ_1 du trièdre supplémentaire le sont également et par suite on peut, à l'aide du premier cas, construire les trois dièdres A_1, B_1 et C_1 de ce trièdre supplémentaire.

Or, A_1, B_1 et C_1 connus nous donnent immédiatement :

$A_1 = 180° - \alpha$; $B_1 = 180° - \beta$ et $C_1 = 180° - \gamma$.

C'est-à-dire, que la connaissance des trois dièdres entraîne, par la considération du trièdre supplémentaire, la détermination des trois faces du trièdre proposé.

Le quatrième cas est donc ramené au premier.

Cinquième cas. *Etant donnés deux dièdres* A *et* B *et la face* α *opposée au dièdre* A, *construire les deux faces* β *et* γ *et le dièdre* C.

Le trièdre supplémentaire nous donne :

$A = 180° - \alpha_1$; $B = 180° - \beta_1$ et $\alpha_1 = 180° - A_1$.

On connait donc de ce trièdre supplémentaire deux faces α_1 et β_1 et le dièdre A_1 opposé à l'une d'elles, la face α_1, ce qui suffit, d'après le troisième cas, pour déterminer les autres éléments, la face γ_1 et les deux dièdres B_1 et C_1.

Or, $\gamma_1 = 180° - C$; $B_1 = 180° - \beta$ et $C_1 = 180° - \gamma$.

La connaissance de γ_1, B_1 et C_1 du trièdre supplémentaire entraîne donc la détermination des deux faces β et γ et du dièdre C opposé à γ.

Ce qui ramène ce cinquième cas au troisième.

Sixième cas. *On donne deux dièdres* A *et* B *et la face commune* γ, *construire les autres éléments de ce trièdre.*

Le trièdre supplémentaire nous donnera encore :

$A = 180^\circ - \alpha_1$; $B = 180^\circ - \beta_1$ et $\gamma = 180^\circ - C_1$.

Donc, dans le trièdre supplémentaire on connait deux faces α_1 et β_1 ainsi que le dièdre compris C_1. Ces conditions suffisent, d'après le deuxième cas, pour déterminer, de ce trièdre supplémentaire, la face γ_1 ainsi que les deux dièdres A_1 et B_1. Or, ces éléments une fois connus nous donnent les relations :

$A_1 = 180^\circ - \alpha$; $B_1 = 180^\circ - \beta$ et $\gamma_1 = 180^\circ - C$; desquelles on tire α, β et C.

On connait donc du trièdre proposé deux faces et le dièdre compris.

Le sixième cas est donc ramené au second.

La résolution des angles trièdres est donc ramenée aux trois cas suivants :

Résoudre le trièdre, connaissant :

1° Les trois faces du trièdre ;

2° Deux de ses faces et le dièdre compris ;

3° Deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles.

303. Premier cas. *Connaissant les trois faces d'un angle trièdre, construire les trois angles dièdres.*

Solution dans l'espace. Si l'on avait le trièdre bien représenté dans l'espace et placé avec une de ses faces ASC sur P_1, on pourrait opérer comme suit :

On coupe le trièdre par un plan passant par un point quelconque *v* de SB et normal à cette arête. Ce plan coupera les faces BSA et BSC suivant les deux droites *vm* et *vn*, normales en *v* à SB, et la face ASC suivant *mn* normale à la projection B'S de BS sur P_1.

Le triangle *mvn* donnera en *v* l'angle plan correspondant du dièdre SB opposé à ASC. (**Fig. 212.**)

Pour avoir les dièdres SA et SC, on coupera par des plans normaux à SA et SC et menés par un même point *a* de l'arête BS.

Ces plans couperont les faces des dièdres suivant le droites *ap* et *a'p*, *as* et *a's* et se coupent eux-mêmes suivant la droite *aa'* normale à P_1.

Les triangles rectangles ainsi obtenus *apa'* et *asa'* ont même hauteur, se construisent par rabattement et donnent en p et s les angles plans des dièdres SA et SC.

Solution graphique. (Ep. 213.) Projection du trièdre sur P_1. La face ASC $= \beta$ sera placée sur P_1. En construisant sur AS et CS les angles AS(B) $= \gamma$ et DS(B) $= \alpha$, on aura les rabattements, sur P_1, des deux autres faces γ et α ; les droites S(B) et S(B) sont les rabattements sur P_1 de la troisième arête SB du trièdre. Ces rabattements ont été opérés autour de SA et de SD.

Pour relever l'arête SB, prenons sur les deux rabattements un point (a) à égale distance de S. Ces points sont les rabattements sur P_1 autour de SA et de SC du seul et même point a de l'arête SB. Comme la projection a' d'un point a est toujours liée à son rabattement (a) par une perpendiculaire à l'axe de rotation, on voit que, dans ce cas, le point a' se trouve au point de rencontre des deux perpendiculaires abaissées de (a) et (a) sur SA et SC. Le point a' obtenu. Sa' sera la projection sur P_1 de l'arête SB du trièdre ; ce dernier est donc représenté et projeté sur P_1.

Angles plans des dièdres A et C. Coupons le trièdre par un plan normal à SA et par un autre plan normal à SC et faisons passer ces plans par le même point a'. Le plan normal à SA coupera la face ASB suivant une droite normale en p à SA et qui est rabattue suivant sa vraie longueur en $p(a)$. Le plan normal à SC coupera BSC suivant une droite normale à SD et rabattue en vraie grandeur le long de $s(a)$. Les triangles rectangles $aa'p$ et $aa's$ de la figure de l'espace peuvent donc être construits. On en connait les bases $a'p$ et $a's$ et les hypothénuses $p(a)$ et $s(a)$.

Les triangles $(a)a'p$ et $(a)a's$ ainsi obtenus donnent en p et s les angles plans correspondants des dièdres SA et SC.

Vérification. Les deux triangles $aa'p$ et $aa's$ dans l'espace ont le côté aa' commun ; il faut donc, sur l'épure, que $a'(a) = a'(a)$, ce qui se vérifie en décrivant de a' comme centre avec $a'(a)$ comme rayon un arc qui passera par l'autre sommet (a).

Angle plan du dièdre B. On coupe le trièdre par un plan normal à l'arête SB. La trace de ce plan sur P_1 sera mn normale à SB'. Ce plan coupe la face ASB suivant une droite normale à SB et passant par m et la face CSB suivant une droite passant par n et normale à SB. Ces deux droites se trouvent donc rabattues en $m(v)$ et $n(v)$, perpendiculaires abaissées de m sur S(B) et de n sur l'autre rabattement S(B) de SB.

Ayant les trois côtés mn, $m(v)$ et $n(v)$ du triangle mvn de l'espace, on peut construire ce triangle $mn(v)$ et l'on aura en (v) l'angle plan correspondant du dièdre B.

Vérification. Le sommet (v) du triangle $m(v)n$ tombe sur SB′ (**221**).

Remarques. On peut toujours supposer que, des trois faces données du trièdre, la face ASC soit la plus grande.

Dans le relèvement des points (a) rabattus sur P_1 autour de SA et de SC, ces points décrivent, dans l'espace, des circonférences de cercle perpendiculaires, l'une à SA, l'autre à SC. La première se projette suivant son diamètre $(a)k$, corde de l'arc atk, et la seconde suivant $(a)l$, corde de l'arc $(a)kl$. (**Fig. 214**).

Pour que ces deux circonférences se rencontrent, les traces-projections de leurs plans doivent se rencontrer, donc aussi les cordes $(a)k$ et $(a)l$.

Or, si ces deux cordes se rencontrent, il faut que la somme des deux arcs $ln + kt$ soit plus grande que l'arc tn, ou, en d'autres termes :

Le problème, pour être possible, exige que la plus grande des faces du trièdre soit plus petite que la somme des deux autres faces. On sait encore que la somme doit être moindre que quatre droits.

304. Problème II. Deuxième cas. *Connaissant deux faces d'un angle trièdre et l'angle dièdre compris, construire la troisième face et les deux autres dièdres.*

Solution dans l'espace. (**Fig. 215**.) Si, avec les données du problème, on parvient à construire les projections du tièdre, supposé placé avec une des faces connues sur P_1, il suffirait de construire le rabattement de l'arête SB autour de SC sur P_1, pour avoir la troisième face α inconnue. On connaîtrait alors les trois faces du trièdre et l'on aurait ramené ce cas au premier.

Soit CSA la face connue placée sur P_1 et coupons le trièdre, supposé construit, par un plan normal à SA. Ce plan coupe la face γ suivant *am*, droite normale à SA, le plan P_1 suivant *ma'* normale à SA, et le plan projetant de SB suivant *aa'*. Les trois droites *aa'*, *a'm* et *ma* formeront un triangle rectangle, dont l'angle aigu en *m* est l'angle plan correspondant du dièdre connu SA.

Si l'on rabat la face γ connue sur P_1, la longueur du côté *am* du triangle *aa'm* sera rabattue suivant $(a)m$. On aurait donc l'hypothénuse $m(a) = ma$ du triangle *aa'm*, un angle aigu en *m*, le sommet *m* et la direction *ma'* du côté *ma'*. Le triangle peut alors être construit et donnera *a'*, première projection d'un point *a* de la troisième arête inconnue. Cette troisième arête sera donc représentée, projetée sur P_1 ainsi que le trièdre lui-même. Le rabattement de la troisième face CSB sur P_1 peut se faire et donnera la troisième face.

Solution graphique. (**Ep. 216.**) Plaçons la face β dans P_1 et sur SA et dans P_1, construisons un angle égal à γ, la deuxième face connue. S(B) sera le rabattement de la troisième arête SB du trièdre, rabattement opéré autour de SA sur P_1. Relevons cette arête, et à cet effet, relevons en un point (a). Ce point se projette en un point de la perpendiculaire abaissée de (a) sur SA. $m(a)$ sera l'hypothénuse du triangle *ama'* de l'espace, lequel triangle, construit avec l'angle aigu *s* connu, donnera *a'*, première projection de *a*.

On a donc S*a'*B' pour projection de la troisième arête.

Rabattement de SB sur P_1 autour de SC. Il suffira de rabattre le point *a*. Le rabattement (a) se trouvera sur la normale abaissée de *a'* sur SC et sur l'arc de cercle décrit de S comme centre avec $S(a)$ comme rayon $S(a)$ est, en effet, la distance du point *a* au sommet S, distance qui se trouve rabattue sur S(B) autour de SA.

Le rabattement de SB nous donne CS(B) pour troisième face α du trièdre.

Le problème est ramené au premier cas.

305. Problème III. Troisième cas. *Connaissant deux faces d'un angle trièdre et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles, construire la troisième face et les deux autres angles dièdres.*

Solution dans l'espace. (**Fig. 217.**) Dans ce troisième cas, comme dans le cas précédent, on placera une des faces connues, la face ASC, sur P_1 et l'on construira, avec les données du problème, la projection orthogonale sur P_1 de l'arête SB. En opérant ensuite le rabattement de SB sur P_1, autour de l'arête SC prise pour axe de rotation, on obtiendra la troisième face BSC du trièdre et l'on aura ramené ce troisième cas au premier.

Il s'agit donc de construire la projection de SB sur P_1 ou de construire la projection o' d'un point o quelconque de SB.

A cet effet, coupons le trièdre, supposé connu et placé avec ASC sur P_1, par un plan normal à l'arête SA. Ce plan coupe ASC suivant la droite mn perpendiculaire en m à l'arête SA, la face ASB suivant mo, perpendiculaire en m à AS et la face BSC suivant une droite no. Le trièdre sera coupé suivant le triangle mon. On connait mn et l'on peut construire mo par le rabattement de la face BSA sur P_1, mais on ne connait pas on.

Si l'on parvient à avoir les éléments nécessaires pour construire le triangle mon, on n'aurait qu'à abaisser du sommet o une perpendiculaire sur la base mn, pour avoir en o' un point de la projection orthogonale de l'arête SB sur P_1.

Coupons le plan du triangle mon par un plan passant par un point quelconque v' de mn et perpendiculaire à SC. Ce plan est perpendiculaire à P_1 et coupera le plan mon, également normal à P_1, suivant vv' perpendiculaire à P_1 et par suite à mn. Le plan P_1 sera coupé par ce plan auxiliaire suivant la droite $v'p$, normale à SC, et le plan de la troisième face BSC suivant vp, normale en p à SC. L'angle des deux droites vp et $v'p$ sera l'angle plan correspondant du dièdre SC connu.

Il résulte de là, que le triangle rectangle $vv'p$ est connu, qu'il peut être construit et que l'on a vv', la perpendiculaire qu'il faut élever en un point v' de mn pour arriver à un point v du côté no du du triangle mno.

On peut donc, sur mn et dans P_1, construire la direction que prend le rabattement de no. Le sommet o sera sur cette direction et de plus à une distance $m(o)$ de m. On aura par suite facilement ce sommet o. La perpendiculaire abaissée ensuite de o sur mn nous donnera o' et par suite So'B', ce qui ramène ce troisième cas au premier.

Solution graphique. (**Ep. 218.**) Soient ASC la face connue placée dans P_1 et AS(B) le rabattement sur P_1 autour de AS de la deuxième face connue. Par (o) pris sur S(B) menons le plan normal à AS, plan qui coupe ASC suivant mn, perpendiculaire à AS, et la face ASB de l'espace suivant mo, droite rabattue sur P_1 suivant $m(o)$. nm et $m(o)$ sont deux côtés du triangle mon suivant lequel le trièdre est coupé.

Soit v' un point de mn par lequel on mène le plan normal à SC.

Si sur $v'p$ comme base, on construit un triangle rectangle, dont l'angle aigu en p est l'angle plan correspondant du dièdre SC, on aura $(v)v'p$, qui sera le rabattement du triangle $vv'p$ de l'espace. $(v)v'$ est donc la perpendiculaire qu'il faut élever en v' à mn pour avoir un point (v) du rabattement du côté $n(o)$ du triangle rabattu mon de l'espace.

En décrivant de m comme centre, avec $m(o)$ pour rayon, un arc de cercle qui coupe le côté $n(v)$ prolongé en (o), on aura $m(o)n$, rabattement sur P_1 du triangle mon de l'espace et par suite o' et, en dernier lieu, So'B', projection sur P_1 de l'arête OB.

Cette arête se rabat ensuite sur P_1 autour de SC en S(B) et donne la troisième face CSB du trièdre. Ce qui ramène ce troisième cas au premier.

Remarques. I. Dans l'hypothèse de notre épure, le problème admet deux solutions. L'arc de cercle que l'on décrit de m comme centre, avec $m(o)$ pour rayon, coupe, en effet, $n(v)$ en deux points qui répondent tous les deux aux conditions du problème.

II. Si l'arc de centre m et de rayon (o) touche la droite $n(v)$, le problème n'admettra qu'une solution.

III. Le problème devient impossible, si cet arc de cercle ne touche ni ne coupe la droite $n(v)$.

Vérifications. Dans le rabattement autour de SC des deux arêtes SB et SB_1 qui répondent à la question du problème, les rabattements (o) et (o_1) des points o et o_1 se trouvent :

I. Sur les normales abaissées de o' et o'_1 sur SC ;

II. Sur l'arc de cercle décrit de S comme centre, avec S(O) pris sur S(B) comme rayon, distance qui marque celle de ces points au point S ;

III. Respectivement sur les arcs de cercles décrits de n comme centre commun, avec les rayons égaux, l'un à $n(o)$, l'autre à $n(o_1)$, longueurs prises sur $n(v)(o)$. Ces longueurs marquent, en effet, les distances du point n respectivement aux points o et o_1 de l'espace.

—

Trièdres trirectangles.

—

Nous donnons quelques problèmes relatifs aux trièdres trirectangles qui trouveront leur application dans la théorie des projections axonométriques ; nous les faisons précéder de quelques propriétés principales de ces trièdres.

306. Propriétés. I. *Le point de concours des hauteurs d'un triangle acutangle est la projection, sur le plan de ce triangle, des sommets de deux trièdres trirectangles, dont les arêtes passent par les sommets de ce triangle.*

II. *En coupant les trois faces d'un trièdre trirectangle par un plan quelconque, les projections, sur ce triangle, des trois arêtes du trièdre coïncident avec les directions des trois hauteurs de ce triangle.*

III. *Lorsque dans un plan, trois droites concourent en un point et forment en ce point trois angles obtus, on peut toujours les considérer comme les projections, sur ce plan, des trois arêtes d'un trièdre trirectangle.*

307. Problème IV. *Construire les projections d'un trièdre trirectangle, dont les arêtes passent par les sommets d'un triangle acutangle donné.*

Solution. (Ep. 219.) Posons le triangle $a'b'c'$ donné dans le premier plan de projection et prenons P_2 perpendiculaire au côté $a'b'$.

Nous savons que le sommet du trièdre trirectangle se projette

Les propriétés des trièdres trirectangles se trouvent démontrées dans la partie du cours qui traite des projections axonométriques. (Suppléments au traité de Géométrie descriptive, premier fascicule. — Projections axonométriques.)

sur P_1, plan du triangle $a'b'c'$, au point de concours s' des hauteurs de ce triangle. La projection du trièdre sur P_1 est donc trouvée.

Rabattons s' sur P_1 autour de $a'b'$ pris pour axe de rotation.

La face $a'b's'$ étant un triangle rectangle en s', le rabattement (s) du sommet s' se trouvera à l'intersection de la perpendiculaire abaissée de s' sur l'axe $a'b'$ avec la demi-circonférence de cercle décrite sur $a'b'$ comme diamètre.

Comme la hauteur sm de la face $a'b's$ du trièdre est parallèle à P_2, la projection s'' de s sera à la rencontre de la perpendiculaire $s's''$ à l'axe avec l'arc de cercle décrit de $b''a''$ comme centre avec sm pour rayon.

Le sommet s'' trouvé, $b''s''c''$ sera la deuxième projection du trièdre trirectangle.

Remarques. I. L'arête sc étant perpendiculaire aux deux arêtes sb et sa, sera perpendiculaire à leur plan, donc à la face abs et par suite à sm.

Il faut donc, puisque cs et sm sont parallèles à P_2, que $s''c''$ soit perpendiculaire à $s''a''$, ce qui se vérifie par une demi-circonférence de cercle qui, décrite sur $a''c''$ comme diamètre, passera par s''.

II. Il existe un deuxième trièdre symétrique du premier par rapport au plan du triangle donné $a'b'c'$.

308. Problème V. *Etant données les projections sur* P_1 *des trois arêtes d'un trièdre trirectangle, trouver les projections de ces arêtes sur* P_2.

Solution. (**Ep. 220.**) Prenons P_2 parallèle à l'une des arêtes sc du trièdre et construisons le triangle acutangle suivant lequel le trièdre se projette sur P_1.

Nous savons que, sur ce triangle, les projections des trois arêtes coïncident avec les directions des trois hauteurs. L'arête $s'c'$ prolongée sera donc la direction de la hauteur correspondante à la base $a'b'$, laquelle sera donc perpendiculaire à l'axe de projection.

Donc, d'un point b' quelconque pris sur s', on abaisse une perpendiculaire sur $s'c'$ que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre en a' avec $s'a'$; $b'a'$ sera un des côtés du triangle. Les deux autres côtés $b'c'$ et $a'c'$ seront menés par b' et a' et sont perpendiculaires respectivement aux arêtes $s'a'$ et $s'b'$; ils doivent se rencontrer en c' pour former le triangle demandé $a'b'c'$.

Ce triangle construit, le problème est ramené au cas précédent (**307**).

309. Problème VI. *Un trièdre trirectangle étant donné, le couper de manière que la section soit un triangle acutangle donné*

Solution. (Ep. 221.) Sur le triangle acutangle donné $a'b'c'$ placé sur P_1, on construit un trièdre trirectangle (**306**). On détermine par rabattement la longueur de ses trois arêtes. Ce sont les longueurs $(s)a'$, $(s)c'$ et $s''b''$.

On détermine ensuite sur les arêtes correspondantes du trièdre donné, et à partir du sommet S, des longueurs égales aux arêtes du trièdre auxiliaire. Le triangle formé par les extrémités a, b et c de ces longueurs sera la section demandée, elle sera égale au triangle donné $a'b'c'$.

La solution graphique se déduit aisément de ce qui précède ainsi que des problèmes IV et V. Les longueurs $(s)(a)$, $(s)(c)$ et $s''b''$ sont égales respectivement à $(s)a'$, $(s)c'$ et $s''b''$.

310. Problème VII. *Etant données les projections d'un trièdre trirectangle, trouver les angles de pente de ses faces avec le plan* P_1.

Solution. (Ep. 222.) Le trièdre est placé de manière que sa projection sur P_1 soit le triangle acutangle $a'b'c'$ et que son arête sc soit parallèle à P_2.

Les plans projetants qui passent par les arêtes sc, sb et sa coupent les faces $sb'c'$, $sa'c'$ et $sa'b'$ suivant des lignes de plus grande pente sd, sc et sb.

Faisons tourner ces plans projetants et amenons les à être parallèles à P_2, en prenant pour axe de rotation la projetante ss' perpendiculaire à P_1 (**278**). On obtiendra pour angles de pente des arêtes les angles $s''a_1''x$, $s''b_1''x$, $s''c_1''x$, et pour angles de pente des faces, les angles $s'_1b''v$, $s''e_1''x$ et $s''d_1''x$.

Etudes de projections. — Figures planes. — Polyèdres.

—

Exercices. — Problèmes.

—

311. Problème VIII. *On donne le centre et le rayon d'une circonférence de cercle située dans un plan donné, construire les projections orthogonales de cette circonférence sur les deux plans de projection* P_1 et P_2.

Lemme. On sait, par la géométrie élémentaire, que la projection orthogonale d'une circonférence de cercle sur un plan est une ellipse.

Le grand axe de cette ellipse est égal au diamètre parallèle au plan de projection et le petit axe sera la projection du diamètre normal au premier.

A l'aide de ces données, la construction des projections d'une circonférence de cercle revient à la construction des projections de son centre et à celles des diamètres parallèles aux plans de projections et de ceux parallèles aux premiers.

Le centre et les axes de l'ellipse obtenus, celle-ci se construira par points.

Le problème précédent présente trois cas différents.

Le plan qui contient la circonférence à projeter est :

1° normal à P_1 ;

2° normal à P_2 ;

3° quelconque.

I. Cas. *La circonférence est située dans un plan normal à* P_1.

Solution. (**Ep. 223.**) On donne le rayon r et le centre de la circonférence par ses deux projections o' et o''.

On opère le rabattement du plan T de la circonférence sur P_1. On obtiendra en (o) le rabattement du centre et de ce point, avec le rayon donné, on décrira une circonférence de cercle qui sera le rabattement sur P_1 de la circonférence donnée.

De ce rabattement on remonte aux projections (**183.—I.**).

Pour avoir la tangente en un point f'' de la circonférence projetée, on construit la tangente en (f) au rabattement et l'on relève cette droite en $x''f''$ (**185**).

Remarque. Au lieu de rabattre le plan T avec le centre o sur P_1, on pourrait rabattre ce plan sur P_2 et opérer comme précédemment.

Autre solution. La projection de la circonférence sur P_1 est une portion de la trace T_1 égale à $a'b'$, projection du diamètre parallèle à P_2. La projection sur P_2 est une ellipse dont o'' est le centre, $a''b''$ le petit axe et la projection $c''d''$ du diamètre normal au premier le grand axe.

Cette ellipse sera construite par points.

Deuxième cas. *La circonférence est dans un plan normal à* P_2.

Solution. (**Ep. 224.**) On rabat le plan T avec le centre de la circonférence sur P_1. Le point (o) sera le rabattement du centre et de ce point comme centre, avec le rayon r de la circonférence donnée, on décrit une circonférence qui sera le rabattement de la première et que l'on relève en projections sur P_1 et P_2 (**187**).

Pour avoir la tangente au point quelconque f', on construira la tangente à la courbe rabattue en (f) et l'on relève cette droite $x\,(f)$ en $x\,f'$ et $x''\,f''$.

Remarque. Au lieu de rabattre le plan T avec le centre o sur P_1, on pourrait opérer le rabattement sur P_2 et continuer ensuite la solution comme précédemment.

Autre solution. La projection de la circonférence sur P_2 est une partie de T_2 égale à la projection $a''b''$ sur P_2 du diamètre parallèle à ce plan.

La projection sur P_1 est une ellipse dont $d'c'$, projection du diamètre parallèle à P_1, est le grand axe et $a'b'$, projection sur P_1 du diamètre normal au premier, le petit axe.

Ces éléments suffisent pour permettre la construction de l'ellipse par points.

Troisième cas. *La circonférence est située dans un plan quelconque.*

Solution. (**Ep. 225.**) On donne les deux traces du plan de la circonférence ainsi que les projections du centre. Après avoir opéré le rabattement du plan de la courbe et de son centre sur P_1, on décrit de ce point comme centre, avec le rayon de la circonférence donnée, une circonférence cercle qui sera le rabattement de la première sur P_1. On relève un point de cette courbe et l'on se trouve ramené au problème du §. **139.**

Remarque. On pourrait opérer le rabattement du plan de la courbe et de son centre sur P_2 et achever le problème comme précédemment.

Autre solution. Projection sur P_1. (**Ep. 225.**) La projection sur P_1 sera une ellipse dont o' est le centre. Le grand axe de cette courbe sera $a'b'$, projection sur P_1 du diamètre parallèle à P_1 ; $a'b'$ est parallèle à T_1.

Le petit axe est la projection sur P_1 du diamètre normal à ab, diamètre qui se projette suivant une normale à $a'b'$ menée par o'. Le problème est ramené à celui de porter sur $o'm'$, à partir de o', et des deux côtés de ce point, des longueurs qui sont les projections du rayon r de la circonférence de cercle.

Ce dernier problème se résoud, comme au §. 199, à l'aide d'un rabattement auxiliaire du centre o sur P_1.

Projection sur P_2. La projection sur P_2 sera une ellipse dont o'' est le centre et $f''g''$ le grand axe; $f''g''$ est parallèle à T_2 et égal à $2r$.

Le petit axe se projette le long de $o''n''$, droite normale à $f''g''$ et à T_2, et il s'agit de porter sur $o''n''$, à partir de o'' et dans les deux directions, une longueur égale à la projection, sur cette ligne, du rayon r de la circonférence donnée. Cette dernière opération se fait, comme au §. **199**, à l'aide d'un rabattement auxiliaire du centre o sur P_2.

312. Exercices et cas particuliers. 1° *Construire les projections d'une circonférence située dans un plan déterminé par deux droites qui se coupent.*

2° *Construire les projections d'une circonférence située dans un plan déterminé par deux droites qui se coupent, le centre étant le point de rencontre de ces droites.*

3° *Par trois points non en ligne droite, faire passer une circonférence.*

313. Problème VIII. *Construire les projections d'un carré, connaissant les deux projections d'un côté et la direction de la projection sur* P_1 *de l'un des côtés adjacents.*

Solution dans l'espace. Si l'on avait la direction de la projection sur P_2 du côté adjacent au côté donné, le problème serait ramené à celui de construire, dans un plan donné, un carré dont on connait le côté et les directions de deux côtés adjacents, problème qui se résoud par un rabattement.

Pour avoir la projection sur P_2 du côté adjacent, amenons par une rotation autour d'un axe normal à P_1 le côté donné dans une position parallèle à P_2. La projection du côté adjacent sera entraînée dans ce mouvement de rotation et sa nouvelle position se déterminera aisément.

La nouvelle projection sur P_2 de ce second côté sera normale à la nouvelle position du premier (**49**).

On peut donc déterminer la nouvelle position de la première trace du second côté, ramener cette trace dans sa position primitive et avoir ainsi les éléments qui déterminent la projection sur P_2 de ce côté.

Le reste du problème s'achèvera en rabattant le plan des deux côtés obtenus sur P_1, en construisant dans ce rabattement un carré sur les deux côtés rabattus et en passant ensuite du rabattement aux projections.

Solution graphique. (Ep. 226.) Soient ab le côté donné et e' la direction de la première projection d'un côté adjacent.

Menons par a un axe normal à P_1 et faisons tourner ab et e' autour de cet axe jusqu'à ce que ab soit parallèle à P_2; la projection e' sera entraînée jusqu'en e'_1 (**275**). La projection nouvelle e''_1 de e sur P_2 sera normale en a'' à $a''m''_1$, nouvelle projection sur P_2 de ab. On a donc en h'_1 la nouvelle position de la première trace de e, trace qui se ramène en h' sur e' et qui se projette en h'' sur P_2 pour y donner $h''a''$, seconde projection du deuxième côté prolongé du carré.

Le carré est donc situé dans le plan des deux droites ab et e qui se coupent en a ; a est même un des sommets du carré dont deux côtés sont alignés sur ab et e. On rabat ab et e sur P_1 (**209** et **191**) ; à partir de (a) et sur $(a)(b)$ comme côté, on construit le carré $(a)(b)(c)(d)$. Ce carré sera le rabattement du carré demandé.

On relève $(a)(b)(c)(d)$ en $a'b'c'd'$ et $a''b''c''d''$, en se servant de trois séries de droites parallèles (**196**).

314. Exercices et applications des deux problèmes précédents.

1° *Construire les projections d'une circonférence qui touche les plans de projections* P_1 *et* P_2 *et dont le plan est parallèle à l'axe.*

2° *Construire les projections d'une circonférence de cercle inscrite dans le triangle formé par les traces* T_1 *et* T_2 *d'un plan et par une droite donnée qui s'appuie sur ces traces.*

3° *Construire les projections d'un carré, connaissant les deux projections de l'un des côtés et la droite sur laquelle se trouve la première projection du du côté opposé au premier.*

4° *Construire les projections d'un carré, connaissant celles d'un côté et l'angle du plan de ce carré avec* P_1.

5° *Construire les projections d'un triangle équilatéral, connaissant les deux projections d'un côté et la direction de la première projection d'un deuxième côté.*

315. Problème IX. *Construire les projections d'un prisme droit reposant par sa base sur* P_1, *connaissant la base et la hauteur du prisme.*

Solution graphique. (Ep. 227.) Le prisme se projette sur P_1 suivant le polygone de sa base.

Les arêtes du prisme projetées sur P_2 sont perpendiculaires à l'axe ; la base supérieure se projette sur P_2 suivant une droite parallèle à l'axe ; la base inférieure se projette sur l'axe.

Notations. L'arête e, invisible en projection sur P_2, sera marquée en ponctué.

316. Problème X. *Construire les projections d'un prisme droit à base pentagonale reposant par une de ses faces latérales sur* P_1, *le plan de la base faisant avec* P_2 *un angle* α.

Solution graphique. (Ep. 228.) La base $abcde$ du prisme se trouvera dans un plan T normal à P_1 et faisant un angle α avec P_2.

On rabat ce plan sur P_1 et l'on construit sur T_1 un pentagone égal à celui de la base du prisme et reposant suivant ab sur T_1.

Le polygone $a'(b)(c)(d)e'$ sera le rabattement, sur P_1, de la base du prisme.

Ce polygone sera relevé en $a'b'c'd'e'$ et $a''b''c''d''e''$ (**183**).

Les arêtes du prisme sont perpendiculaires à la base, donc à T ; elles se projettent sur P_1 suivant leurs véritables longueurs le long des normales à T_1 et sur P_2 suivant des droites parallèles à l'axe de projection.

La seconde base du prisme sera parallèle à la première.

Notations. Dans la projection du prisme sur P_2, l'arête $b''b''_1$ ainsi que les côtés $c''_1b''_1$ et $b''_1a''_1$ de la base postérieure sont invisibles, donc à marquer en ponctué. En projection sur P_1, les deux arêtes $a'a'_1$ et $e'e'_1$ sont cachées, donc ponctuées.

317. Problème XI. *Construire les projections d'une pyramide triangulaire dont on connait les six arêtes et qui répose par sa base sur* P_1.

Solution graphique. (Ep. 229.) On construira sur P_1 le triangle $a'b'c'$ de la base dont les trois côtés sont connus. Cette base se projette sur P_2 suivant l'axe en $a''b''c''$.

Sur $a'c'$ comme base, avec les deux côtés *as* et *cs* construisons un triangle $a'c'(s)$, qui sera le rabattement sur P_1 de la face *sac* de la pyramide. Le sommet (s) de ce triangle sera le rabattement autour de $a'c'$ du sommet s de la pyramide.

Construisons un autre triangle sur $b'c'$, ayant pour base $b'c'$ et pour côtés latéraux les deux arêtes connues *bs* et *cs*. Ce triangle $(s)c'b'$ sera le rabattement sur P_1 de la face latérale *scb* de la pyramide ; (s) sera le rabattement autour de $c'b'$ du sommet s de cette dernière.

Comme le rabattement d'un point sur P_1 est uni à la projection de ce point sur ce plan par une normale à l'axe de rotation, nous voyons, que s' se trouve au point de rencontre des normales abaissées des deux rabattements (s) du sommet s sur les axes $a'c'$ et $c'b'$.

La projection de la pyramide sur P_1 se trouve ainsi déterminée.

La projection sur P_2 sera déterminée, dès que l'on a la projection s'' du sommet s de la pyramide.

Opérons la rotation de l'arête *sc* de la pyramide autour d'un axe normal à P_1 et passant par s et amenons sc à être parallèle à P_2. La trace sur P_1 de cette arête aura pour nouvelles projections c'_1 et c''_1 (**275**), et la nouvelle projection de cette arête sur P_2 passera par c''_1 et par s'' et sera égale à la vraie longueur cs.

Le sommet s'' est donc déterminé ; il se trouve à la rencontre de l'arc de cercle de rayon cs décrit de c'' comme centre avec la normale $s's''$ à l'axe de projection.

Notations. L'arête $s''c''$ est à marquer en ponctué ; c'est la seule arête invisible dans la projection de la pyramide sur P_2.

318. Problème XII. *Construire les projections et le développement du tétraèdre régulier, connaissant la longueur de l'arête.*

Solution graphique. (Ep. 230.) Les projections du tétraèdre régulier s'obtiennent comme celles de la pyramide triangulaire.

Développement. La base du tétraèdre et les triangles équilatéraux construits sur chaque côté de cette base constituent le développement de ce polyèdre.

319. Problème XIII. *Construire les projections et le développement de l'hexaèdre régulier, connaissant la longueur de l'arête.*

Solution graphique. (Ep. 231.) L'hexaèdre, placé sur P_1 avec une de ses faces parallèles à P_2, se projette sur P_1 suivant le carré de sa base et sur P_2 suivant un autre carré.

Si nous supposons le solide éloigné de P_2 d'une longueur égale à son côté, le développement de l'hexaèdre comprendra le carré de la base, quatre carrés construits sur les côtés de la base et le carré de la projection du solide sur P_2.

Notations. La position adopté pour le solide n'admet aucune arête à tracer en ponctué.

320. Problème XIV. *Construire les projections et le développement de l'octaèdre régulier, connaissant la longueur de l'arête.*

Solution graphique. (Ep. 232.) Dans un octaèdre régulier les trois diagonales se coupent à angle droit et en parties égales.

Prenons une des diagonales parallèle à P_2 ; les deux autres se projettent sur P_1 suivant des droites se coupant à angle droit et en parties égales au point $e'f'$, projection sur P_1 de la première diagonale, prise normale à P_1.

Donnons aux premières projections des deux diagonales parallèles à P_1 une direction voulue. L'octaèdre sera formé de deux pyramides quadrangulaires, à base carrée commune, placées symétriquement par rapport au plan des deux diagonales parallèles à P_1. La projection de l'octaèdre sur P_1 sera la même que celle de l'une des deux pyramides quadrangulaires.

La projection de cette pyramide sur P_1 a pour contour un carré dont le côté est égal à l'arête de l'octaèdre et dont les diagonales ont des directions connues. On construira ce carré, dont on unira les sommets $a'b'c'd'$ au centre f' et la projection de l'octaèdre est déterminée sur P_1.

La projection sur P_2 s'obtient en relevant les points a', b', c' et d' sur le plan de la base en a'', b'', c'' et d'', et en unissant ces points à e'' et f'', projections sur P_2 des sommets e et f de l'octaèdre.

La longueur $e''f''$ étant égale à $a'c'$ et divisée en parties égales par le plan $a''b''c''d''$.

Notations. Les arêtes eb et bf sont invisibles sur P_2 et s'y projettent suivant les lignes ponctuées $e''b''$ et $b''f''$.

Développement. Le développement de l'octaèdre s'obtient en construisant sur un côté de ce solide, $d'c'$ par exemple, un triangle équilatéral $d'c'(e)$, qui sera le rabattement de la face dce de l'octaèdre sur le plan des deux diagonales parallèles à P_1.

Le triangle équilatéral construit sur $c'(e)$ sera le rabattement autour de $c'(e)$ de la face ceb, etc.

Le développement comprendra, comme l'épure l'indique, huit triangles équilatéraux correspondant aux faces de l'octaèdre, et groupés de telle façon qu'une feuille de carton, de papier ou de métal, découpée suivant le contour extérieur de cette figure et pliée suivant les différentes arêtes, s'applique exactement sur la surface latérale totale du polyèdre.

321. Problème XV. *Construire les projections et le développement du dodécaèdre régulier, connaissant la longueur de l'arête.*

Solution graphique. (Ep. 233.) Le dodécaèdre a douze faces qui sont des pentagones réguliers. Ces faces sont groupées autour du centre du polyèdre de manière à être parallèles deux à deux.

Projection sur P_1. Supposons le dodécaèdre placé sur P_1, de manière que le pentagone $1'2'3'4'5'$ qui sert de base ait le côté $4'5'$ normal à l'axe de projection.

Chaque côté de ce pentagone servira de base à une des cinq faces latérales groupées autour de la base.

Sur les côtés $4'3'$ et $4'\ 5'$ de la base, construisons les pentagones réguliers $3'(10)(11)(12)4'$ et $4'(12)(13)(14)5'$. Ces deux polygones peuvent être considérés comme les faces $4'\ 3'$ et $4'\ 5'$ du dodécaèdre rabattues sur P_1. Comme sur le polyèdre ces deux faces ont l'arête $4'12$ commune, nous voyons que le sommet 12 se trouve rabattu sur P_1, d'abord en (12) autour de $4'\ 3'$, puis en (12') autour de $4'\ 5'$. Sa projection sur P_1 se trouvera par suite en $12'$, point de rencontre des perpendiculaires abaissées des deux rabattements du point 12 sur les axes de rabattement respectifs (**179**.—I).

$4'\ 12'$ est donc la projection sur P_1 d'une première arête latérale du dodécaèdre.

Les arêtes $3'10'$, $2'8'$, $1'6'$, $5'14'$ se trouvent par les mêmes considérations ; ces projections ont toutes même longueur ; par suite les sommets $12'$, $10'$, $8'$, $6'$ et $14'$ se trouvent sur une circonférence de cercle de centre $0'$ et de rayon $0'\ 12'$.

Le côté (12)(11) du polygone $4'\ 3'$ (10)(11)(12) sera le rabattement sur P_1, autour de $4'\ 3'$, du côté 12—11 du polyèdre. Ce rabattement rencontre l'axe de rabattement $4'\ 3'$ prolongé en (13). En unissant ce point (13) au point $12'$, on aura en $11'$, point de rencontre de $(13)12'$ avec la perpendiculaire abaissée du rabattement (11) sur l'axe de rabattement $4'\ 3'$, la projection du sommet 11 du polyèdre sur P_1 (**179**).

Ce sommet $11'$ se trouve sur le rayon $11\ 0'$; tous les autres sommets $9'$, $7'$, $15'$ et $13'$ se construisent par les mêmes considérations, se trouvent à la même distance de $0'$ et l'on démontrera

---

Propriétés des polyèdres réguliers et construction de ces solides. (Poinsot, Journal de l'Ecole polytechnique, t. IV, p. 35. — Rouché et de Comberousse, Traité de Géométrie, 1874, p. 233.)

aisément qu'ils sont, avec les sommets 12′ 10′ 8′ 6′ et 14′ sur une même circonférence de cercle.

Comme d'un autre côté les arêtes 12′11′, 11′10′, 10′9′, etc. sont toutes de même longueur, les sommets de rang pair et ceux de rang impair diviseront la circonférence de rayon 0′12′ en dix parties égales et sont les sommets d'un décagone régulier.

Nous avons ainsi la projection, sur P_1, *de la face latérale inférieure* du dodécaèdre.

Projection sur P_2. La face projetée en 14′ 5′ 4′ 12′ 13′ est, dans l'espace, perpendiculaire à P_2 ; elle se projette donc sur P_2 suivant une droite. Cette droite 13″ 5″ est égale à la vraie longueur de l'apothème d'une des faces du polyèdre ; elle passe par 5″ et coupe la normale à l'axe 13′ 13″ en 13″.

Tous les sommets de rang impair, à l'exception de ceux de la base inférieure, se projettent en 13″, 11″, 9″, 7″ et 15″ sur une parallèle à l'axe de projection menée par 13″.

Les sommets de rang pair se projettent en 14″ 12″ 10″ 8″ et 6″ sur la parallèle à l'axe de projection menée par 12″ et 14″ qui se projettent, comme toute la face 14 5 4 12 13, sur la droite 5″ 13″.

Remarque. Dans la projection de la face latérale inférieure du dodécaèdre sur P_2, 5″ 13″ est la *vraie longueur de l'apothème d'une face polygonale* du solide et 2″ 8″ la *vraie longueur du côté du polyèdre régulier.*

Projection de la face latérale supérieure du dodécaèdre. Les projections sur P_1 et P_2 des six facettes qui constituent la face latérale supérieure du dodécaèdre s'obtiennent par les considérations qui ont servi à la construction des projections de la face latérale inférieure. Les faces du polyèdre étant deux à deux parallèles, on voit que le pentagone qui a les deux arêtes 7′ 8′ et 8′ 9′ pour côtés doit se projeter sur P_2 le long de 8″ 7″, droite parallèle à 13″ 4″ et que cette projection 18″ 8″ doit être égale à 4″ 13″ qui représente la projection sur P_2 de la face pentagonale parallèle à celle que nous considérons. De là se déduisent 7′ 18′ et 9′ 19, projections sur P_1 des côtés de cette face.

On sait toutefois que ces côtés, projetés sur P_1, sont dirigés suivant les rayons du cercle 0′ 7′, comme le sont, et pour la même raison, les côtés 4′ 12′ et 5′ 14′. Ces considérations suffisent pour achever les projections du dodécaèdre sur P_1 et sur P_2.

Développement du dodécaèdre régulier. (Ep. 234.) Adoptons une échelle réduite de 1 à 3/4 et construisons, à cette échelle, un pentagone régulier sur chacun des cinq côtés du pentagone 1 2 3 4 5 de la base ; l'ensemble de ces polygones formera le développement de la face latérale inférieure du dodécaèdre.

Sur le côté 8 9 de l'un de ces polygones, on construira de même un nouveau pentagone régulier, développement de l'une des faces de la face latérale supérieure du dodécaèdre.

Le côté 19 18 de ce pentagone servira de base à un pentagone régulier 19 18 17 16 20, développement de la base supérieure qui, avec les cinq pentagones réguliers construits sur ses côtés, constitueront le développement de la face latérale supérieure du dodécaèdre.

L'ensemble des deux développements sera celui de la face latérale totale du polyèdre régulier.

Remarque. Un feuille de papier, de carton ou de métal, découpée suivant le développement et pliée suivant les arêtes des deux bases, inférieure et supérieure, et suivant le côté commun 8 9, peut être appliquée sur le dodécaèdre et le recouvrira totalement et exactement.

322. Problème XVI. *Construire les projections et le développement de l'icosaèdre régulier, connaissant la longueur d'une arête.*

Solution graphique (Ep. 235.) Prenons une des diagonales de l'icosaèdre perpendiculaire à P_1. Les pyramides pentagonales qui ont les extrémités 1 et 12 de cette diagonale pour sommets ont pour faces latérales des triangles équilatéraux, ayant l'arête du polyèdre pour longueur des côtés. Ces faces sont également inclinées sur la

(*) Dans les problèmes des §. §. 311, 312 etc. qui sont du ressort du dessin des projections, une des applications de la Géométrie descriptive, on peut appliquer la remarque faite au § 2 et remplacer P_1 et P_2 respectivement par plan horizontal et plan vertical etc.

diagonale, laquelle est normale à la base de ces pyramides. Ces bases, dont le côté est égal à l'arête du polyèdre, sont donc des pentagones réguliers parallèles à P_1 ; elles se projettent sur P_1 suivant des pentagones réguliers ayant pour centre la projection de la diagonale 1 12.

Plaçons la projection de la base pentagonale de la pyramide supérieure de manière que le côté $2'3'$ soit normal à l'axe de projection.

Sur $2'\,3'$ comme côté, construisons un triangle équilatéral $3'2'(1)$. Ce triangle sera le rabattement, sur le plan de la base supérieure de la pyramide, de la face triangulaire 1 2 3.

Cette face est normale à P_2 ; sa projection sur P_2 sera une droite, égale à la vraie longueur $x(1)$ de l'apothème. Il suffira donc de décrire de l'extrémité $1''$ comme centre, avec $x(1)$ pour rayon, un arc de cercle qui coupe la perpendiculaire abaissée de $3'$ et $2'$ sur l'axe de projection pour avoir, en $3''\,2''$, la projection du côté 3 2 de la base pentagonale de la pyramide supérieure. Cette base, parallèle à P_1, se projette sur P_2 suivant une parallèle à l'axe de projection et donne en $6''$, $4''$ et $5''$ les projections sur P_2 de ses sommets.

Considérons actuellement le triangle $2'3'(1)$, non plus comme le rabattement de la face 3 2 1, mais bien comme celui de la face 3 2 9, qui fait partie de la face latérale d'une nouvelle pyramide pentagonale ayant le sommet 9 du triangle 3 2 9 pour sommet.

Le sommet 9, rabattu en (9) sur P_1, se relève en abaissant de (9) une normale sur l'axe de rabattement $3'2'$ (**179**). Comme le sommet 9 est à une distance du sommet inférieur 12 égale à l'arête du polyèdre, et que cette distance et arête sont parallèles et égales à l'arête 1 5, leurs projections sur P_1 seront égales à $1'\,5'$ et il suffira de porter cette longueur à partir de $1'$ sur $1'(9)$, pour avoir, en $9'$, la projection sur P_1 d'un premier sommet de la base pentagonale de la pyramide inférieure. Le pentagone régulier $9'8'7'11'10'$ sera la projection de cette base.

Pour avoir la projection du sommet 9 sur P_2, il suffira de décrire de $3''2''$ comme centre, avec l'apothème $x(9)$ comme rayon, un arc de cercle, qui coupera la perpendiculaire $9'9''$ à l'axe de projection au point $9''$ demandé.

La base de la pyramide pentagonale inférieure sera par suite projetée en $9''8''7''11''10''$ sur une parallèle à l'axe de projection.

Les projections du polyèdre sur P_1 et P_2 sont ensuite facilement complétées comme le montre l'épure.

Développement de l'icosaèdre régulier. (**Ep. 236.**) Construisons, à une échelle moindre, un triangle équilatéral dont le côté a même longueur, réduite à l'échelle adoptée, que l'arête de l'icosaèdre. Nommons ce triangle 1 2 3. Nous aurons ainsi le développement d'une première face du polyèdre. Sur le côté 3 1 de ce triangle, construisons un autre triangle équilatéral, qui sera le développement de la deuxième face de l'icosaèdre.

L'épure montre suffisamment la suite des opérations pour arriver au développement complet du polyèdre.

Remarque. Une feuille de papier, de carton ou de métal, découpée suivant la figure du développement et pliée suivant les côtés communs des facettes triangulaires, peut être appliquée complètement et exactement sur la surface latérale totale de l'icosaèdre.

323. Problème XVII. *Construire les projections d'un prisme droit à base rectangulaire reposant par cette base sur un plan perpendiculaire à P_2. On donne la hauteur du prisme ainsi que le rabattement de la base sur* P_1.

Solution graphique. (**Ep. 237.**) Soit $(a)(b)(c)(d)$ le rabattement sur P_1 de la base *abcd* suivant laquelle ce solide repose sur le plan T dont les traces sont T_1 et T_2.

On relève le rectangle rabattu en $(a)(b)(c)(d)$. A cet effet, on en relève d'abord un sommet, le sommet (a), dont les projections seront a' et a'' (**186**). Pour relever les trois autres sommets, on se servira avec avantage de deux séries de droites parallèles, les perpendiculaires abaissées de ces points sur l'axe de rotation T_1 et les côtés parallèles $(a)(d)$ et $(b)(c)$ du rectangle (**196**). La diagonale $(d)(b)y'$ relevée en $d'b'y'$ pourra servir de vérification (**179**). La première projection du polygone de la base inférieure du prisme sera donc le parallélogramme $a'b'c'd'$, lequel se projette sur P_2, le long de T_2, en $a''b''c''d''$.

Les arêtes du prisme se projettent sur P_2 suivant des droites perpendiculaires à T_2 et suivant leurs véritables longueurs.

En portant cette véritable longueur connue sur chaque arête, on déterminera la projection sur P_2 de la base supérieure $\alpha\beta\gamma\delta$ du solide.

De la projection sur P_2 on passe aisément à la projection des arêtes et de la base supérieure sur le plan P_1. Ces arêtes projetées sur P_1 sont normales à T_1 (**58**), donc parallèles à l'axe de projection.

Notations. Tel que le prisme est placé par rapport aux plans de projection, l'arête $c\gamma$ est cachée sur P_2, les deux côtés *cb* et *ab* de la base et l'arête $b\beta$ sont cachées sur P_2.

Ces lignes sont donc à tracer en ponctué.

324. Exercices et cas particuliers. I° *Même problème, le prisme ayant sa base dans un plan perpendiculaire à* P_1.

On construira les projections de la base du prisme (**183**). Les arêtes du solide sont perpendiculaires au plan T de la base qui est perpendiculaire à P_1 ; elles se projettent donc sur P_1 suivant leurs véritables dimensions sur des perpendiculaires à T_1 et sur P_2 suivant des parallèles à l'axe de projection.

II° *Construire les projections d'un cube, connaissant le côté et le rabattement de la base sur* P_1 :

1° *Le cube est placé sur un plan perpendiculaire à* P_2 ;

2° *Le cube a sa base dans un plan perpendiculaire à* P_1.

III° *Projections du prisme droit à base triangulaire reposant par sa base sur un plan normal à* P_1 *ou à* P_2.

On donne le rabattement de la base sur P_1 et la hauteur du prisme.

IV° *Construire les projections d'une pyramide régulière, connaissant la hauteur et le rabattement de la base sur* P_1.

La base est située dans un plan normal à P_2 *ou dans un plan normal à* P_1.

Le rabattement de la base est un polygone régulier dont on construit le centre. On relève ce centre et la base sur le plan qui les contient. Par le centre ainsi construit on mène une normale au plan de la base et l'on porte sur cette normale, à partir du centre, une longueur égale à la hauteur de la pyramide. L'extrémité de cette hauteur sera le sommet de la pyramide. Ce sommet, avec les droites qui l'unissent aux sommets de la base, déterminent les arêtes de la pyramide.

V° *Faire l'épure du n° IV pour le cas d'une pyramide régulière à base triangulaire, carrée, pentagonale, hexagonale, octogonale, décagonale, etc.*

VI° *Construire les projections d'une pyramide quelconque reposant par sa base sur un plan normal à* P_1 *ou à* P_2. *On donne la hauteur de la pyramide, le rabattement sur* P_1 *de la base ainsi que celui de la projection s du sommet sur le plan de cette base.*

On relève la base et la projection s du sommet. Par ce dernier point s obtenu, on mène une normale au plan T qui contient la base et l'on porte sur cette normale, à partir de son pied sur T, une longueur égale à la hauteur de la pyramide.

L'extrémité de cette longueur sera le sommet de la pyramide. On unira par des droites les projections ainsi construites du sommet aux projections de mêmes noms des sommets de la base et l'on aura les projections de la pyramide.

VII° **Exercices**. *Appliquer les constructions précédentes à la pyramide oblique à base triangulaire, carrée, rectangulaire, polygonale quelconque.*

325. Problème XVIII. *Construire les projections d'un prisme droit à base rectangulaire reposant par cette base sur un plan de profil. On donne la hauteur du prisme ainsi que le rabattement de la base sur* P_1.

Solution. (**Ep. 238.**) La base rabattue en $(a)(b)(c)(d)$ sera relevée et donne ainsi pour ses projections les longueurs $c''d''a''b''$ et $d'c'b'a'$ situées respectivement sur les traces T_2 et T_1 du plan de profil (**183**).

Les arêtes du prisme sont, dans les deux projections, parallèles à l'axe de projection et se projettent sur P_1 et P_2 suivant leurs véritables longeurs.

Notations. L'arête d'' est invisible en projection sur P_2.

Dans la projection du prisme sur P_1, c'est l'arête b' qui est cachée.

Les deux arêtes d'' et b' sont donc à tracer en ponctué.

326. Cas particuliers et exercices. I° *Même problème pour un prisme droit à base carrée, pour un prisme droit à base triangulaire et pour un prisme droit à base polygonale quelconque.*

II° *Projections d'une pyramide régulière reposant par sa base sur un plan de profil. On donne le rabattement de la base ainsi que la hauteur de la pyramide.*

On construira le centre de la base rabattue et l'on relève cette base avec son centre dans le plan de profil.

Par les projections du centre, on mène une perpendiculaire au plan de profil et l'on porte sur cette perpendiculaire, et à partir du centre, une longueur égale à la hauteur de la pyramide pour avoir, à l'extrémité de cette longueur, le sommet du solide.

Les projections de la pyramide s'achèvent en unissant, par des droites, les projections du sommet aux projections de mêmes noms de la base déjà construite.

III° *Appliquer les constructions précédentes à la pyramide régulière à base triangulaire, carrée, pentagonale, hexagonale, etc.*

IV° *Construire les projections d'une pyramide quelconque reposant par sa base sur un plan de profil. On donne la hauteur de la pyramide, le rabattement sur* P_1 *de la base et celui de la projection du sommet de la pyramide sur cette base.*

On opère comme au n° II et l'on peut appliquer les constructions à une pyramide dont la base est un polygone quelconque donné.

327. Problème XIX. *Construire les projections d'un prisme droit à base rectangulaire reposant par cette base sur un plan parallèle à l'axe de projection. On donne la hauteur du prisme et le rabattement de sa base sur* P_1.

Solution graphique. (Ep. 239.) Soient T_1 et T_2 les traces du plan T sur lequel repose le prisme et $(a)(b)(c)(d)$ le rabattement sur P_1 de la base.

Opérons un changement de plan de projection. Prenons pour nouveau système de plans de projection celui formé par P_1 et P_3, P_3 étant normal à l'axe de projection. Le nouvel axe A_1 sera normal à l'ancien.

Construisons (**251**) la nouvelle trace T_3 du plan T ainsi que les projections du prisme sur les plans T_1 et T_3. Cette dernière construction se fera comme au problème XVII du §. **323**.

Ayant obtenu les projections du prisme sur P_1 et P_3, on passera de la projection sur P_3 à celle sur P_2. On observera, dans ces opérations, que pour passer des projections a' et a''' d'un point quelconque a du prisme aux projections a' et a'' de ce point, il suffit d'abaisser de a' une normale sur le nouvel axe A et de porter sur cette perpendiculaire, et à partir de A, une longueur égale à la distance qui sépare a''' de l'ancien axe A_1. L'extrémité de cette perpendiculaire sera la projection a'' du point a. (**246**. Règle pratique.)

On trouvera ainsi les deux projections du prisme proposé.

328. Exercices et cas particuliers. *Appliquer le problème précédent à la construction des projections :*

I° *Du cube ;*

II° *Du prisme droit à base triangulaire ;*

III° *Du prisme droit à base quelconque ;*

IV° *De la pyramide régulière à base triangulaire, à base carrée, pentagonale, hexagonale, etc.*

V° *De la pyramide oblique à base quelconque.*

On donne le rabattement sur P_1 de la base de ces solides, les hauteurs des prismes et, pour les deux derniers cas, le rabattement sur P_1 de la projection du sommet sur le plan de la base et la hauteur de la pyramide.

329. Problème XX. *Construire les projections d'un prisme droit à base rectangulaire reposant par cette base sur un plan oblique par rapport à* P_1 *et* P_2. *On donne la hauteur du prisme ainsi que le rabattement de la base sur* P_1.

Solution graphique. (Ep. 240.) Opérons un changement de plan de projection. Prenons pour nouveau système celui des deux plans P_1 et P_3, P_3 étant perpendiculaire à la trace T_1 du plan T de la base du prisme. Le nouvel axe A_1 sera normal à T_1. On construira T_3 (**251**) et l'on aura ramené le problème à celui, de construire les projections du prisme reposant par sa base sur un plan perpendiculaire à P_3 (**323**).

On construira, d'après ce problème, les projections du prisme sur P_1 et P_3. De la projection sur P_3 on passera à celle sur P_2 en suivant la marche exposée au §. **327**.

330. Exercices et cas particuliers. *Appliquer le problème précédent à la construction des projections :*

I° *Du cube ;*

II° *Du prisme droit à base triangulaire ;*

III° *Du prisme droit à base quelconque ;*

IV° *De la pyramide régulière à base triangulaire, à base carrée, pentagonale, hexagonale, etc ;*

V° *De la pyramide oblique à base quelconque.*

On donne les rabattements sur P_1 des bases de ces solides, les hauteurs des prismes et, pour les deux derniers cas, le rabattement sur P_1 de la projection du sommet de la pyramide sur le plan de sa base.

331. Problème XXI. *Construire les projections d'un cube qui repose sur un plan donné. On connait les projections de l'une des arêtes de sa base.*

Solution graphique. (Ep. **241**.) On construit le rabattement sur P_1 du plan donné T et de l'arête *ab* y située (**191**). Sur le rabattement de cette arête comme côté, on construit un carré que l'on relève ensuite en projections en $a'b'c'd'$ et $a''b''c''d''$. A cet effet, on se sert de trois séries de droites parallèles (**196**), les parallèles $(a)(d)$ et $(b)(c)$, $(a)(b)$ et $(d)(c)$ et les perpendiculaires abaissées des sommets (a), (b), (c) et (d) de la base sur l'axe de rabattement.

Par les sommets *a, b, c* et *d* de la base ainsi obtenues en projections, on mène des normales au plan T et l'on portera, à partir de ces sommets et sur ces perpendiculaires, des longueurs égales à la vraie longueur $(a)(b)$ de l'arête cube.

Les extrémités α, β, γ, et δ de ces normales formeront les sommets de la base supérieure du cube. Pour porter, à partir du point *c*, une longueur égale à $(a)(b)$ sur la normale menée par *c* au plan T, on opère par rotation. On fait tourner la normale $c\,\gamma$ autour d'un axe ω mené par *c* normalement à P_1, jusqu'à ce que la droite $c\,\gamma$ soit parallèle à P_2 (**279**). Dans cette position, on porte sur la droite la longueur $c''\gamma''_1$ égale à $(a)(b)$. L'extrémité γ''_1 qui se projette sur P_1 en γ'_1 sera ramenée sur la position primitive de la droite et donne, en γ'' et γ', les deux projections du sommet γ de la base supérieure du cube.

Comme les arêtes latérales du cube sont normales à T_1, elles auront les projections de mêmes noms égales et parallèles. Les projections du cube s'achèveront donc facilement.

332. Exercices et applications. *Appliquer le problème précédent :*

I° *Au prisme droit à base rectangulaire ;*

II° *Au prisme droit à base quelconque ;*

III° *A la pyramide régulière dont on connaît la hauteur et un côté de la base ; cette base étant triangulaire, carrée, pentagonale, hexagonale, etc. ;*

IV° *A la pyramide oblique à base quelconque.*

On connaît les projections d'un côté de la base, le plan et la nature de celle-ci, les projections sur P_1 et P_2 du pied de la hauteur de la pyramide ainsi que la vraie longueur de cette hauteur.

333. Problème XXII. *Construire les projections du tétraèdre régulier, connaissant l'arête et le plan sur lequel le tétraèdre doit reposer par une de ses faces.*

Solution graphique. (**Ep. 242.**) On rabat la trace T_2 du plan donné sur P_1 (**191**). Sur P_1, avec l'arête du tétraèdre comme côté, on construit un triangle équilatéral $(a)(b)(c)$ qui sera le rabattement de la face du tétraèdre placée sur T. On construit le centre de ce triangle, le point de rencontre (s') des bissectrices des angles de $(a)(b)(c)$. Ce point (s') sera le rabattement sur P_1 du pied de la hauteur du tétraèdre sur le plan T de la base *abc*.

La base rabattue $(a)(b)(c)$ et le pied (s') sont ensuite relevés en projections.

A cet effet, on prolongera les côtés $(a)(b)$ et $(a)(c)$ de la base jusqu'aux traces (T_2) et T_1 en (m) et x', (z) et n'.

On relève ces points m, x, n et z (**192**) et l'on a les moyens pour trouver les projections $a'b'c'$ et $a''b''c''$ de la base, ainsi que les projections s' et s'' du pied de la hauteur abaissée du sommet S du tétraèdre sur le plan de la base.

Par le point s ainsi obtenu, on mène une perpendiculaire au plan T et l'on porte sur cette perpendiculaire, et à partir du pied s, une longueur égale à la hauteur du tétraèdre. L'extrémité S de cette perpendiculaire sera le sommet du tétraèdre.

La hauteur du tétraèdre est égale à $(s)(s')$, côté de l'angle droit du triangle rectangle construit sur $(s')(c)$ avec $(c)(s)$ égal à l'arête du tétraèdre. Cette longueur $(s)(s')$ ainsi construite sera portée sur la perpendiculaire Ss en employant, à cet effet, une rotation de cette ligne autour d'un axe ω mené par s normalement à P_1 (**279**).

Le sommet S du tétraèdre ainsi obtenu, joint par des droites aux sommets a, b et c de la base, donnera les arêtes latérales du solide.

Notations. Dans la projection du tétraèdre sur P_1, l'arête $a'b'$ sera cachée, donc à tracer en ponctué. La projection du solide sur P_2 donne l'arête cachée $a''c''$.

334. Problème XXIII. *Construire les projections d'un cube, supposé suspendu par un de ses sommets, de manière que la diagonale correspondante soit normale à* P_1 *et touche ce plan. On donne le rabattement sur* P_1 *de la base du cube.*

Solution graphique. (**Ep. 243.**) Soit $(a)(b)(c)(d)$ le rabattement sur P_1 de la base du cube, base qui touche P_1 au point (a). Supposons la diagonale de cette base normale à l'axe A et opérons un changement de plan de projection, en adoptant pour nouveau système de plans de projection celui formé par P_1 et P_3, P_3 étant normal à P_1 et à l'axe A, donc parallèle à la diagonale du cube qui est normale à P_1 et à un plan diagonal mené par cette droite.

Ce plan diagonal (**Fig. 244.**) contient la diagonale ab de la base, les arêtes du cube passant par a et b et la diagonale $a\beta$ normale à P_1.

Ces différentes lignes se projettent sur le nouveau plan P_3 suivant leurs véritables longueurs ; la projection de la base $abcd$ du cube coïncidera avec la projection de la diagonale ab. Cette dernière diagonale se projette sur P_3 suivant $a'''b'''$, droite qui fait avec $a'''\beta'''$ perpendiculaire à A_1, l'angle γ que la diagonale $a\beta$ du cube fait dans l'espace avec la diagonale ab de la base.

On construira (**fig. 245.**) cet angle γ ; on tracera la direction $a'''b'''$ et l'on construit les projections du cube sur P_1 et P_3, en se basant sur le § **327**. Le cube reposera, comme le prisme du problème XIX, sur le plan de la base $a'''b'''$ parallèle à l'axe A.

De la projection du cube sur P_3 on passera à celle sur P_2 (**327**).

335. Problème XXIV. *Une pyramide repose par sa base sur* P_1 ; *construire les angles de pente des arêtes et des faces sur* P_1 *ainsi que les angles que font les faces latérales entre elles.*

Solution graphique. (Ep. 246). Angles de pente des arêtes. On fera tourner les arêtes autour d'un axe normal à P_1 et passant par le sommet de la pyramide jusqu'à ce qu'elles soient parallèles à P_2 (**279**). Dans cette nouvelle position, l'angle que $s''a''_1$, nouvelle projection de l'arête as sur P_2, fait avec l'axe de projection sera l'angle pente de sa sur P_1.

Angles de pente des faces latérales. On coupera les faces par des plans perpendiculaires à leurs traces sur P_1 et l'on obtient des lignes de plus grande pente de ces faces. Les angles de pente de ces lignes de plus grande pente sont les angles de pente des faces sur P_1.

C'est ainsi que l'angle β est l'angle de pente de la face sad.

Angle de deux faces latérales. Pour avoir l'angle γ sous lequel les deux faces *sbc* et *sdc* se coupent, on coupe ces deux plans par un plan normal à leur intersection commune *sc* et l'on achève comme au § **221** (2[de] solution).

336. Prolème XXV. *Construire les projections d'une pyramide dont on connaît la base et les inclinaisons des faces latérales sur cette base.*

Solution graphique. (**Ep. 247.**) Plaçons la base dans P_1 et construisons les lignes de plus grande pente des faces latérales. D'un point o' pris a l'intérieur de la base, menons des plans normaux aux arêtes $a'b'$, $b'c'$ et $c'a'$. Ces plans coupent les faces latérales de la pyramide suivant les lignes de plus grande pente, lesquelles se projettent sur P_1 suivant $o'm'$, $o'n'$ et $o'p'$.

En faisant tourner ces lignes autour d'un axe de rotation $o'o''$ normal à P_1 jusqu'à ce qu'elles soient parallèles à P_2, on aura pour nouvelles projections de ces lignes sur P_1 les droites $o'm'_1$, $o'n'_1$, $o'p'_1$ et sur P_2 les droites $m''_1e''_1$, $n''_1g''_1$ et $p''_1f''_1$, droites qui font avec l'axe de projection les angles α, β et γ, angles de pente des faces latérales dont ces lignes sont les lignes de plus grande pente.

Chaque face de la pyramide étant actuellement représentée par sa trace sur P_1 et par sa ligne de plus grande pente, on en déterminera les droites d'intersection, les arêtes latérales de la pyramide, d'après les principes exposés au § 139.

337. Problème XXVI. *Couper une pyramide quadrangulaire quelconque par un plan, de manière que la section soit un parallélogramme.*

Solution dans l'espace. (**Fig. 248.**) La pyramide est placée avec sa base quadrangulaire *abcd* sur P_1. Les deux faces latérales opposées *sad* et *sbc* se coupent suivant la droite *ms ;* les deux faces *sab* et *sdc* suivant *ns*. Le plan de ces deux droites coupe P_1 suivant *mn.*

Supposons le problème résolu et soit 1 2 3 4 le parallélogramme à construire sur la face latérale de la pyramide.

Puisque les deux côtés opposés 1 2 et 4 3 sont parallèles, les faces latérales *sad* et *sbc* menées suivant ces lignes se coupent suivant *ms* parallèle à ces côtés.

1 2 et 4 3 sont donc parallèles à *ms*. On prouvera de même que les côtés 4 1 et 3 2 sont parallèles à *ns*. Il résulte de là, que le plan du parallélogramme 1 2 3 4 est parallèle au plan *msn* et que réciproquement, tout plan parallèle à *msn* coupe la pyramide suivant une figure semblable à 1 2 3 4, donc suivant un parallélogramme.

Il suffira donc de déterminer le plan *msn* et de couper la pyramide par un plan parallèle au premier, pour avoir une section plane qui répond aux conditions du problème.

Solution graphique. (**Ep. 249.**) La solution graphique est entièrement indiquée dans la solution de l'espace. Remarquons toutefois, que pour avoir les droites d'intersection des faces latérales de la pyramide avec le plan parallèle au plan *msn*, il suffira d'avoir la trace de ce plan sur P_1, de marquer les points t', u', r' et v' où cette trace coupe les traces des faces latérales, et de mener par les points u' et t' des droites parallèles à $m's'$ et par les points r' et v' des droites parallèles à $n's'$. Ces deux couples de droites détermineront le parallélogramme de la section plane projeté sur P_1.

La projection du parallélogramme sur P_2 se déduit facilement de la projection de cette figure sur P_1.

Vérifications. 1° Les côtés 1 2 et 3 4 du parallélogramme obtenu sont parallèles à *ms*.

2° Les côtés 4 1 et 2 3 sont parallèles à *ns*.

3° Les sommets 1, 2, 3 et 4 du parallélogramme ont leurs deux projections reliées par des perpendiculaires à l'axe de projection.

338. Problème XXVIII. *Couper une pyramide à base trapèze par un plan, de manière que la section soit un parallélogramme.*

Ce problème n'est qu'un cas particulier du problème précédent.

339. Problème XXVII. *Circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire.*

Solution dans l'espace. Le centre de la sphère est un point également distant des quatre sommets de la pyramide. Ce centre est donc le point d'intersection de trois plans perpendiculaires aux milieux de trois arêtes non situées dans une même face de la pyramide.

Solution graphique. (**Ep. 250.**) Prenons pour premier plan de projection P_1, le plan de la base $a'b'c'$ de la pyramide et supposons P_2 parallèle à l'arête sb.

Les plans perpendiculaires à $c'b'$ et à $a'c'$ menés par les milieux m et n de ces arêtes sont des plans perpendiculaires à P_1 ; ils se rencontrent suivant une normale à ce plan, laquelle a pour trace-projection sur P_1 le point o'. La deuxième projection $o''r$ sera perpendiculaire à l'axe.

Le plan mené par le milieu p de sb perpendiculairement à cette ligne est un plan normal à P_2 ; il rencontre ro'' en o'', centre de la sphère.

ob sera le rayon de cette sphère ; sa vraie longueur se détermine par un rabattement de son premier plan projetant autour de $o''r$ pris pour axe. Ce plan projetant, rabattu parallèlement à P_2 suivant $o'\beta$, donnera $o''b$ pour la vraie longueur du rayon de la sphère.

340. Problème XXIX. *Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire.*

Solution dans l'espace. (**Fig. 251**.) Le centre o de la sphère se trouve à l'intersection des plans bissecteurs de trois dièdres de la pyramide, pourvu que ces trois dièdres ne passent pas par le même sommet.

Prenons les trois dièdres ayant pour arêtes les côtés ab, bc et ca de la base de la pyramide. Les trois plans bissecteurs se coupent en un point o, centre de la sphère.

En joignant le point o aux sommets a, b et c, on détermine un trièdre, une pyramide de même base que la pyramide donnée.

Tout plan parallèle à abc coupe cette nouvelle pyramide suivant un triangle $\alpha\beta\gamma$, dont les côtés sont parallèles à ceux de la base abc.

Si l'on avait les trois points α, β et γ, sommets de la section $\alpha\beta\gamma$, on n'aurait qu'à unir a et α, b et β, et la rencontre de ces deux droites déterminerait le centre o.

Remarquons aussi que si nous coupons la face sac par un plan perpendiculaire à ac et passant par le sommet s de la pyramide, ce plan coupe la base suivant ns', la face asc suivant sn, ligne de plus grande pente du plan sac, et le plan bissecteur de ac suivant nq, bissectrice de l'angle sns'. Cette bissectrice rencontrera le plan sécant $\alpha\beta\gamma$ en un point x situé sur la ligne $\alpha\gamma$.

Solution graphique. (Ep. 252.) On prendra le plan de la base *abc* pour premier plan de projection P_1. On coupera la pyramide par un plan *t* parallèle à P_1. Ce plan coupera les bissectrices des angles de pente des trois faces de la pyramide en des points *x*, *y* et *z*, par lesquels passeront les côtés de la section $\alpha\beta\gamma$, côtés parallèles à ceux de *abc* et qui donneront α, β et γ et par suite *o*.

Pour trouver les points *x*, *y* et *z*, on rabat chacun des trois plans, passant par le sommet et perpendiculaires aux côtés de la base *abc*, dans une position parallèle à P_2 autour de leur intersection commune *sv* prise pour axe de rotation.

Le rayon de la sphère est égal à $o''\tau$, la sphère devant être tangente à la base *abc* de la pyramide, donc à P_1.

EXERCICES.

1. Construire un trièdre rectangle, connaissant une des faces du dièdre droit et le dièdre opposé à la face connue.

2. Sur un des plans de projection on donne deux droites concourantes : déterminer les projections d'un point de l'espace, connaissant sa distance à chacune de ces droites, et faire connaître les angles que forme avec chaque ligne donnée la droite qui joint le point demandé au point de concours des deux premières.

3. Déterminer l'angle dièdre du tétraèdre régulier.

4. Déterminer l'angle dièdre de l'octaèdre régulier, ainsi que l'angle d'inclinaison d'une face sur le plan mené par l'extrémité de trois arêtes partant du même sommet.

5. Mêmes questions pour le dodéeaèdre régulier.

6. — pour l'icosaèdre régulier.

7. Résoudre directement le cinquième cas de l'angle trièdre : on connaît deux dièdres et la face opposée à l'un d'eux.

8. On connaît la base d'une pyramide pentagonale régulière, ainsi que le dièdre que forment entre elles les faces latérales : déterminer la grandeur des faces latérales de la pyramide ainsi que leur inclinaison sur le plan de la base.

9. Mener un plan qui coupe un dièdre donné, de manière que le trièdre obtenu ait deux faces égales, et que la face interceptée sur le plan demandé ait une grandeur angulaire donnée.

10. Déterminer l'intersection des plans bissecteurs des trois dièdres formés par P_1 et deux autres plans.

11. Un triangle acutangle est donné sur P_1 : déterminer un point de l'espace tel qu'en le joignant aux trois sommets du triangle, on obtienne un trièdre trirectangle.

12. On donne les deux projections du sommet d'un trièdre tri-rectangle ainsi que la direction de la projection sur P_1 de chaque arête : déterminer les projections de ces arêtes sur P_2.

13. Construire un tétraèdre régulier, connaissant les projections d'un côté et la ligne de plus grande pente de la face qui le contient.

14. Déterminer la longueur de la diagonale d'un parallélipipède rectangle et l'angle qu'elle forme avec chaque arête, connaissant la longueur de chaque arête.

15. Étant données les directions des projections de trois arêtes contiguës d'un parallélipipède, ainsi que la longueur de ces arêtes, construire les projections du parallélipipède.

16. Construire un parallélipipède, connaissant le milieu de quatre arêtes.

17. Déterminer les projections d'un parallélipipède rectangle, connaissant un sommet, la projection sur P_1 d'une arête, et les directions des projections sur P_1 des deux autres arêtes qui aboutissent au sommet donné.

18. Déterminer les projections d'un parallélipipède rectangle, connaissant une arête, la projection sur P_1 d'une arête adjacente et la longueur de la troisième arête.

19. Étant donné un parallélipipède droit à base rectangulaire, le couper par un plan tel que la section soit un carré.

1° Le plan doit passer par un point donné sur une arête.

2° Le plan doit passer par un point donné de l'espace.

20. Couper un cube par un plan qui passe par le milieu de trois arêtes non contiguës et non parallèles deux à deux, et déterminer la vraie grandeur de la section.

21. On donne un point sur l'arête d'un tétraèdre quelconque : on demande les projections du chemin minimum qu'il faut suivre sur les faces pour revenir au point de départ.

22. On donne une pyramide triangulaire régulière : quelle est la ligne brisée minimum qui, partant d'un sommet de la base, viendrait se terminer à un point donné sur l'arête correspondante après avoir rencontré deux fois chaque arête latérale intermédiaire.

23. Par un point donné mener un plan qui coupe les trois faces latérales d'une pyramide triangulaire sous des angles égaux.

24. Par un point donné mener un plan qui coupe les trois arêtes d'une pyramide triangulaire sous le même angle.

25. Par un point pris sur l'arête d'une pyramide triangulaire quelconque, faire passer un plan sécant donnant pour section un triangle isocèle, la longueur des côtés égaux étant donnée.

26. Couper une pyramide triangulaire quelconque par un plan tel que la section soit un triangle isocèle dont la base ait une longueur donnée et soit parallèle à une droite située sur une des faces de la pyramide.

27. Un parallélipipède droit a pour base un parallélogramme quelconque : couper ce parallélipipède par un plan, de manière que la section soit un carré.

LIVRE II.

PROJECTIONS ORTHOGONALES COTÉES.

Plans cotés.

Chapitre premier.

Représentation du point, de la ligne droite et du plan.

341. Considérations générales. Définitions. Si, d'un point a, on abaisse une perpendiculaire sur un plan P, *le pied de cette perpendiculaire est la projection de a sur* P. (**Fig. 253.**)

La perpendiculaire abaissée du point a sur le plan P est *la projetante du point a.*

Le plan P *est le plan de projection.*

La projetante étant normale à P, on dit que le point *a est projeté orthogonalement sur* P ; *le pied de la projetante est la projection orthogonale de a sur* P.

Le plan P est un plan horizontal, perpendiculaire à la direction du fil à plomb, à moins qu'on ne dise le contraire.

342. Loi des projections orthogonales. *Tout point de l'espace est lié à sa projection par une perpendiculaire au plan de projection ; cette perpendiculaire mesure la distance du point au plan.*

Représentation et détermination du point.

343. Projection cotée du point. Un point a de l'espace est suffisamment représenté par sa projection orthogonale sur P et la longueur de sa projetante.

Il suffira, en effet, pour retrouver le point a, d'élever une perpendiculaire au plan P au point qui est la projection de a et de prendre sur cette perpendiculaire, à partir de P, une longueur égale à la projetante.

Plusieurs points de l'espace sont suffisamment représentés sur P par leurs projections sur ce plan et par les longueurs de leurs projetantes.

Ces longueurs, exprimées en unités de longueur, peuvent être inscrites dans un tableau ou être marquées en nombres abstraits à côté des projections de ces points.

La projection d'un point, accompagnée de ce nombre, est **la projection cotée de ce point.** *Le nombre lui-même est* **la cote du point.**

Un point est donc suffisamment représenté et déterminé par sa projection orthogonale cotée sur un plan.

344. Notations. Nous marquerons la projection cotée d'un point par la lettre qui est donnée à ce point dans l'espace, accompagnée d'un chiffre abstrait qui exprime la longueur de la projetante, chiffre placé sous forme d'exposant.

Représentation et détermination de la droite.

345. Projection d'une droite. Une droite d de l'espace étant déterminée par deux de ses points, cette droite sera suffisamment représentée par les projections cotées de ces deux points.

Les projetantes de ces points déterminent, avec la droite, un **plan projetant** perpendiculaire au plan de projection ; il coupe ce dernier suivant une droite, **la projection de la droite** *d,* et il contient les projetantes de tous les points de cette droite.

De ce qui précède, nous concluons :

Que la projection orthogonale d'une droite d est une droite ;

Que les projections de tous les points de d se trouvent sur la projection de cette droite ;

Que la droite d est suffisamment déterminée par sa projection sur P *avec les projections cotées de deux de ses points.*

346. Graduer la projection d'une droite. — Echelle de pente d'une droite.

Dans les applications, il est d'une grande utilité d'avoir, sur la projection d'une droite, les points dont les cotes suivent une progression arithmétique, les hauteurs qui correspondent à ces cotes sont des multiples de l'unité de hauteur.

Déterminer, sur la projection de la droite, cette suite de points particuliers, c'est graduer cette projection ; celle-ci ainsi graduée porte le nom d'**échelle de pente de la droite**.

Les points ainsi déterminés et dont les cotes sont des nombres entiers portent le nom de **points à cotes rondes**.

La longueur qui sépare, sur la projection graduée de la droite, deux cotes qui diffèrent de l'unité porte le nom d'**intervalle**.

Proposons-nous de graduer la projection d'une droite.

Premier cas. *Les extrémités de la droite ont des cotes exprimées en nombres entiers.*

On divisera la projection *ab* de la droite en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans la différence des cotes des points *a* et *b*. Chaque point de division sera la projection d'un point de la droite ayant pour cote un multiple de l'unité de hauteur.

Deuxième cas. *La cote de l'une des extrémités de la droite est un nombre fractionnaire.*

Soit la droite *ab* (**Ep. 254.**), *a* ayant pour cote 2 et *b* la cote $4\frac{2}{3}$.

On réduira les deux cotes en fractions dont le dénominateur est trois, et l'on divisera *ab* en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans la différence des numérateurs de ces fractions. Dans notre exemple, on divise *ab* en 8 parties égales et la cote 3 sera au point *c,* extrémité de la troisième division, etc.

Troisième cas. *Graduer, d'après ce qui précède, la droite dont les deux extrémités a et b ont pour cotes respectives les nombres fractionnaires* 2 2/3 *et* 6 6/9.

347. Trace de la droite. *La trace d'une droite est le point où cette droite perce le plan de projection. Cette trace a pour cote zéro.*

348. Pente d'une droite. On appelle **pente d'une droite sur le plan de projection,** la tangente trigonométrique de l'angle α que cette droite fait avec sa projection.

Cette tangente est exprimée par le rapport $\frac{CE}{EA} = \frac{BD}{DA}$ (**Fig. 255**); en d'autres termes :

La pente d'une droite est égale au rapport de la différence des cotes de deux points quelconques de la droite à la distance qui sépare la projection de ces deux points.

En ne considérant de la droite que deux points dont les cotes rondes diffèrent de l'unité, on voit *que la pente de la droite est exprimée par* $\frac{h}{i}$, *h étant l'unité de hauteur et i l'intervalle de la droite.*

Représentation et détermination du plan.

---

349. Trace du plan. La trace d'un plan sur P est la droite suivant laquelle ce plan coupe le plan de projection.

350. Ligne de pente du plan. La ligne de pente du plan est une de ses droites **de plus grande pente,** c'est-à-dire, la droite du plan qui, de toutes celles que l'on peut mener par un point dans ce plan, fait le plus grand angle avec sa projection.

Cette droite est perpendiculaire à la trace du plan et par conséquent à toute horizontale de ce plan.

En effet, soient un plan R et un point quelconque *a* de ce plan. Une droite quelconque *ab* du plan a pour valeur de sa pente le rapport $\frac{aa'}{a'b}$. La perpendiculaire *ac* abaissée de *a* sur la trace du plan a pour pente la valeur du rapport $\frac{aa'}{a'c}$. (**Fig. 256.**)

Or, *ac* étant perpendiculaire à la trace *bc*, *a'c* le sera aussi et par conséquent $a'c < a'b$, d'où $\frac{aa'}{a'c} > \frac{aa'}{a'b}$;

la pente de *ac* est donc plus grande que la pente d'une droite quelconque du plan menée par *a*.

La ligne *ac* est donc une ligne *de plus grande pente du plan.*

Toute horizontale du plan R peut être considérée comme le résultat de l'intersection de R avec un plan horizontal ; ce dernier étant parallèle au plan de projection P, il en résulte que *toute horizontale du plan est parallèle à la trace de ce plan.*

La ligne de pente du plan, perpendiculaire à la trace de ce plan, sera donc perpendiculaire à toute horizontale de ce même plan.

351. Echelle de pente du plan. *La projection graduée d'une des lignes de plus grande pente du plan sera* **l'échelle de pente de ce plan.**

352. Pente du plan. *La pente du plan est celle d'une de ses lignes de plus grande pente.*

353. Angle de pente. *L'angle de pente de cette ligne de plus grande pente sera l'angle de pente du plan.*

354. Représentation du plan. *Un plan étant déterminé par deux droites qui se coupent, tout plan est suffisamment représenté par la projection graduée d'une de ses lignes de plus grande pente.*

En effet, (**Fig. 257.**) la ligne de plus grande pente *ab* étant perpendiculaire à la trace du plan à représenter, l'échelle de pente *ab'* de ce plan sera perpendiculaire à cette trace ; par suite celle-ci est connue dès que l'on donne *ab'*. Deux droites du plan étant représentées, celui-ci le sera également.

Pour retrouver le plan de l'espace représenté par son échelle de pente, je construis la trace T de ce plan ainsi que la droite *ab* dont *ab'* est la projection ; le plan, suffisamment représenté par *ab'*, sera en même temps déterminé par cette droite.

Notations. Dans le tracé des épures, l'échelle de pente d'un plan se marque par un double trait formé de deux traits assez rapprochés.

L'une de ces lignes est pleine, l'autre sera pleine ou présentera la notation du trait mixte, suivant que le plan est une donnée, un résultat d'un problème, ou qu'il est auxiliaire et qu'il sert à la construction.

La seconde droite, qui fait ainsi connaître la nature du plan, en est **la caractéristique**.

Chapitre II.

—

Des différentes positions du point, de la droite et du plan par rapport au plan de projection.

—

Des différentes positions du point.

—

355. Suivant qu'un point de l'espace est situé au-dessus du plan horizontal, dans ce plan ou au-dessous de celui-ci, sa cote est positive, zéro ou négative.

Les trois positions du point représentées dans la figure **258** ont pour projections cotées les points A^2, B^0 et C^{-2} (**Ep. 259.**).

—

Des différentes positions de la droite.

—

Une droite peut être
- située dans le plan de projection,
- parallèle . . . . à ce plan,
- perpendiculaire. . à ce plan,
- ou oblique . . . à ce plan.

—

356. Droite du plan horizontal. *Une droite située dans le plan horizontal est elle-même sa projection. Chaque point de cette droite a pour côte zéro.* (**Fig. 260 — I. Ep. 261 — I.**)

357. Droite horizontale. *Une droite parallèle au plan horizontal, une horizontale, a pour échelle de pente une droite qui a partout même cote. L'intervalle sera infiniment grand.* (**Fig. 260** — II. **Ep. 261** — II.)

358. Droite verticale. *Une droite perpendiculaire au plan horizontal, une verticale, se projette suivant un seul point, la* **trace-projection** *de la droite. L'intervalle est égal à zéro.* (**Fig. 260** — III. **Ep. 261** — III.)

Pour ne pas confondre la projection d'une verticale avec la projection d'un point, on ne cote pas la projection de la première.

359. Droite oblique. *Une oblique au plan de projection se projette sur ce plan suivant une droite, son* **échelle de pente**, *dont les intervalles sont d'autant plus grands que la pente de la droite est petite.* (**Fig. 260** — IV. **Ep. 261** — IV.)

Ces intervalles ont pour limites l'infini (pour l'horizontale) et zéro (pour la verticale).

—

Des différentes positions du plan.

—

Un plan peut être	parallèle . . . . perpendiculaire. . ou oblique . . .	au plan de projection.

—

Ces trois positions particulières du plan se reconnaissent à la position de sa ligne de plus grande pente. Suivant que cette ligne est horizontale ou verticale, le plan sera horizontal ou vertical.

360. Plan horizontal. *Un plan horizontal n'a pas de trace ; son échelle de pente est une droite horizontale.* (**Fig. 262** — I. **Ep. 263** — I.)

361. Plan vertical. *Si le plan est vertical, sa trace horizontale passe par la trace-projection de l'échelle de pente.*

Le plan est indéterminé aussi longtemps que l'on ne donne pas sa trace. Celle-ci s'appelle la **trace-projection du plan.** (**Fig. 262** — II. **Ep. 263** — II.)

362. Plan oblique. *Un plan oblique est caractérisé par une échelle de pente oblique.* (**Fig. 262** — III. **Ep. 263** — III.)

Chapitre III.

—

Des différentes positions que le point, la droite et le plan peuvent avoir entre eux dans l'espace.

—

Des différentes positions que deux droites peuvent avoir entre elles.

—

<table>
<tr><td rowspan="3">Deux droites peuvent</td><td>se rencontrer,</td><td rowspan="2">elles sont situées dans un même plan.</td></tr>
<tr><td>être parallèles,</td></tr>
<tr><td colspan="2">ne pas être dans un même plan.</td></tr>
</table>

—

263. Droites qui se rencontrent. (**Ep. 267** — I.) *Si deux droites se coupent :*

1° *Les échelles de pente se coupent en un point qui a même cote sur chacune des deux droites;*

2° *Les horizontales qui joignent les cotes de mêmes noms des deux droites sont parallèles.*

En effet, si les deux droites se rencontrent, elles déterminent un plan dont la trace est A C et dont toutes les horizontales, telles que *dg*, *ef*, etc. sont parallèles à A C. Or, ces horizontales sont les droites qui joignent les cotes de mêmes noms des droites.

La **figure 264** montre à l'évidence que la projection du point B doit avoir même cote sur chacune des échelles de pente des droites, et que cette cote doit exprimer la hauteur B *b*.

264. Droites parallèles. (**Ep. 267** — II.) *Si deux droites sont parallèles, leurs échelles de pente sont parallèles, graduées dans le même sens et de la même manière. Les intervalles séparant des cotes égales sont égaux.*

En effet, les deux plans projetants menés par les deux droites sont parallèles; leurs traces sur le plan de projection le sont donc également (**Fig. 265**). Or, ces traces sont les échelles de pente des deux droites. Les deux droites situées dans les deux plans projetants parallèles, doivent encore être dirigées dans le même sens et faire avec leurs projections des angles égaux, autrement elles ne seraient pas parallèles. De cette dernière condition, on déduit l'égalité des deux triangles acc^1 et ACC^1, d'où $ac^1 = AC^1$. L'intervalle est donc le même sur les deux droites; les échelles de pente sont donc graduées dans le même sens et de la même manière.

365. Droites non situées dans un même plan. (**Ep. 267** — III.) *Le point de rencontre des deux échelles de pente n'a plus la même cote sur chacune des deux échelles; les horizontales qui joignent les cotes de mêmes noms des deux droites ne sont plus parallèles.*

366. Droites perpendiculaires entre elles. (**Ep. 267** — IV.) Pour que la simple inspection des projections indique la perpendicularité des deux droites, il faut que l'une d'elles soit horizontale. (**Fig. 266**). Dans ce cas, la projection de l'autre droite sur un plan horizontal passant par la première sera perpendiculaire à cette première. CD sera perpendiculaire à AB. Les projections de AB et de CD sur le plan de projection sont parallèles à ces droites et par conséquent se coupent sous un angle droit.

—

Des différentes positions d'une droite à l'égard d'un plan.

—

Une droite peut être { située dans un plan; parallèle . . . . / perpendiculaire. . / oblique . . . . } au plan.

—

367. Droite située dans un plan. (**Ep. 269** — I.) *Une droite est située dans un plan si deux de ses points sont dans ce plan.*

Le point de cote zéro de la droite, sa trace, sera situé sur la trace du plan; un point quelconque, de cote 4, sera situé sur l'horizontale de cote 4 du plan.

368. Droite parallèle au plan. (Ep. 269 — III.) *Une droite est parallèle à un plan si ce dernier contient une droite parallèle à la première.*

On prendra un point quelconque du plan; par ce point, on fait passer une droite parallèle à la droite donnée (**264**); cette dernière est parallèle au plan si la première est dans le plan, donc, si sa trace se trouve sur la trace du plan.

369. Droite perpendiculaire à un plan. (Ep. 269 — II.) *Si une droite est perpendiculaire à un plan :*

1° *Les échelles de pente de la droite et du plan sont parallèles;*

2° *Ces échelles sont cotées en sens contraires;*

3° *La pente de la droite est l'inverse de celle du plan.*

Soit (**fig. 268.**) A un point de la trace du plan; par ce point, menons la droite AB perpendiculaire au plan et la droite AC située dans le plan donné et perpendiculaire à la trace T; AC sera une ligne de plus grande pente du plan.

1° Les deux droites AB et AC, perpendiculaires toutes les deux à T, se projettent sur le plan de projection H suivant des perpendiculaires à T (**49**).

Par suite, les projections de AB et AC, respectivement les échelles de pente de ces droites, ont même direction et sont parallèles.

2° La figure prouve suffisamment que les graduations de AB′ et de AC′ sont en sens contraires.

3° Les deux triangles rectangles BAB′ et CAC′ sont équiangles et donnent

$$\frac{B\,B'}{B'\,A} = \frac{A\,C'}{C\,C'}; \text{ or } \frac{B\,B'}{B'\,A} \text{ est la pente de B A,}$$

$$\frac{A\,C'}{C\,C'} = \frac{1}{\text{pente de } A\,C} = \frac{1}{\dfrac{C\,C'}{C'\,A}}.$$

La pente de la droite est donc l'inverse de celle du plan.

Remarque. La propriété précédente donne $\frac{h}{i} = \frac{i'}{h}$; i et i' étant les intervalles des deux échelles de pente B B′ et A C′ et h l'unité de hauteur.

On tire de là $$h^2 = i \cdot i'.$$

370. Droite oblique au plan. (**Ep. 269** — IV.) Une droite oblique à un plan a sa trace en dehors de celle du plan; son échelle de pente n'est pas parallèle à celle du plan et ne jouit pas des propriétés qui caractérisent celle d'une droite perpendiculaire à un plan.

—

Des différents positions que deux plans peuvent avoir entre eux.

—

Deux plans sont parallèles ou se coupent.

—

371. Plans parallèles. *Si deux plans sont parallèles, leurs échelles de pente sont parallèles, graduées dans le même sens et de la même manière.*

En effet, les deux plans parallèles P et P′ (**Fig. 270**) ont des traces parallèles; ils sont inclinés du même côté du plan de projection et font avec celui-ci le même angle. Des plans perpendiculaires aux deux traces T et T′ coupent les deux plans suivant les droites parallèles A B et A′ B′ qui sont perpendiculaires à ces traces. Ces droites sont les lignes de plus grande pente des deux plans; elles sont parallèles, donc elles jouissent des propriétés démontrées pour le parallélisme des droites.

372. Plans qui se coupent. Dès que les échelles de pente de deux plans ne sont pas parallèles, ces plans se coupent.

Différents cas particuliers peuvent se présenter.

1er cas. — *Les échelles de pente des deux plans sont des droites quelconques.*

Les plans se rencontrent suivant une droite à déterminer par points. Deux horizontales de mêmes cotes des deux plans, suffisamment prolongées, déterminent à leur intersection un point de la droite commune aux deux plans. Ce point a pour cote la cote des horizontales qui le déterminent. D'autres points se trouvent de la même manière.

2e cas. — Les échelles de pente ont des directions parallèles. (Fig. 271.) Les traces horizontales A B et A′ B′ de ces deux plans sont parallèles. Les deux plans se coupent donc (**61**) suivant une horizontale parallèle à ces traces.

La projection de cette horizontale sur H sera normale aux échelles de pente des deux plans.

3e cas. — Les deux plans ont même inclinaison, même pente. Leur intersection est une droite qui se projette suivant la bissectrice de l'angle des traces ou des horizontales de ces deux plans.

4e cas. — Les deux plans sont verticaux. L'intersection commune est une verticale qui se projette suivant un point, sa trace-projection, qui est la rencontre des deux traces des plans.

5e cas. — L'un des plans est vertical. L'intersection commune se projette suivant la trace-projection de ce plan.

373. Plans se coupant à angle droit. — Plans perpendiculaires entre eux. En général, la simple inspection des échelles de pente de ces plans ne suffit pas pour reconnaître cette position particulière.

Par un point de l'un des plans, on doit abaisser une perpendiculaire sur l'autre ; si cette droite reste dans le premier plan, celui-ci sera perpendiculaire au second.

Cas particuliers. Dans quelques cas particuliers, la perpendicularité de deux plans peut se déduire des caractères de leurs échelles de pente.

1° Traces parallèles. (Fig. 272.) Si les deux plans P et P′, perpendiculaires dans l'espace, ont des traces parallèles, les lignes de plus grande pente de ces plans, menées par un point A de l'intersection commune, se trouvent dans un même plan projetant A B C. Comme M N est parallèle aux traces des deux plans sur H, l'angle B A C sera l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans donnés. Cet angle est donc droit et par suite A C, perpendiculaire dans la face P′ à l'arête M N du dièdre droit P P′, sera perpendiculaire à P.

Une des deux lignes de plus grande pente sera donc perpendiculaire au plan passant par l'autre et jouira, projetée sur le plan H, des propriétés énoncées pour une droite perpendiculaire à un plan (**269**).

2° **Les deux plans sont verticaux**. Les traces-projections se coupent à angle droit (à démontrer).

3° **Un des plans est vertical**. L'autre plan (**Fig. 273**), perpendiculaire au premier, coupera le plan horizontal suivant sa trace, perpendiculaire à la trace-projection (à démontrer). L'échelle de pente du plan P′ sera donc parallèle à cette trace-projection.

4° **Un des plans est horizontal**. L'autre plan sera vertical et n'aura qu'une trace-projection et pas d'échelle de pente.

Chapitre IV.

—

Applications. — Problèmes.

Problèmes fondamentaux.

—

374. Problème I. *Une droite étant donnée par son échelle de pente, trouver la cote d'un point quelconque de cette droite.*

La solution de ce problème se base sur les deux lemmes suivants :

Lemme I. *Si une droite de l'espace est divisée en un certain nombre de parties quelconques* AB, BC, *etc.* (**fig. 274.**) *les projections de ces parties sont entre elles comme les différences des cotes de leurs extrémités.*

Ainsi on aura $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{BB' - AA'}{CC' - BB'}$.

Lemme II. *Si la droite de l'espace est divisée en parties égales, sa projection l'est également et les cotes des points de division suivent une progression arithmétique.*

Solution du problème I. (**Ep. 275.**) Soit à trouver la cote du point D. La cote x de ce point sera donnée par le rapport $\frac{AB}{BD} = \frac{2-1}{x-2}$. (Lemme I.)

Remarque. Pour la solution purement graphique de ce problème, voir le chapitre des rabattements.

375. Problème II. *Une droite étant donnée par son échelle de pente, trouver sur cette échelle le point dont la cote est donnée.*

Solution. (**Ep. 276.**) Soient les points A,B et C de la droite, ayant respectivement pour cotes *a, b* et *c*. Le point de cote *d* sera projeté en X et ce point est à une distance BX du point B, distance donnée par le rapport $\frac{\text{AB}}{\text{BX}}=\frac{b-a}{d-b}$.

Remarque. La solution purement graphique de ce problème est donnée dans le chapitre des rabattements.

376. Problème III. *Déterminer la cote d'un point situé dans un plan donné.*

Solution. (**Ep. 277.**) Le point A, situé dans le plan, se trouvera sur une horizontale de ce dernier. Cette horizontale passe par A et se projette suivant une parallèle à la trace du plan, donc, suivant une perpendiculaire à son échelle de pente. Tout point de cette horizontale ayant même cote que le point A, ce dernier aura pour cote celle du point B, laquelle se détermine par le problème précédent.

377. Problème IV. *Par un point donné, mener une droite parallèle à une droite donnée.*

Solution. (**Ep. 278.**) L'échelle de pente de la droite demandée passe par le point donné A^3; elle est parallèle à l'échelle de pente de la droite donnée, graduée dans le même sens et de la même manière, sa cote 3 étant en A.

378. Problème V. *Par un point donné, mener une droite perpendiculaire à un plan donné.*

Solution. (**Ep. 279.**) L'échelle de pente de la droite passe par la projection du point E et sera parallèle à l'échelle de pente du plan. Pour graduer cette échelle, observons que la pente du plan doit être l'inverse de celle de la droite. Or, la pente du plan $\frac{h}{\text{AB}}=\frac{h}{i}$, h étant l'unité de hauteur et i l'intervalle. La pente de la droite est égale à $\frac{h}{x}$, x étant la longueur à chercher qui, sur la projection de la droite, mesure la distance entre deux *cotes rondes* qui se suivent, l'intervalle de l'échelle de pente de la droite.

La pente de la droite étant l'inverse de la pente du plan, on a $\frac{h}{x}=\frac{i}{h}$.

On voit que h, qui est moyenne proportionnelle entre i et x, sera la hauteur d'un triangle rectangle dont $i = AB$ est un des segments de l'hypothénuse, et x l'autre.

Elevons donc en B une perpendiculaire à l'échelle de pente du plan, et prenons $BC = h$; unissons A et C par la droite AC, et élevons en C une perpendiculaire à AC. Nous aurons le triangle rectangle ACD dans lequel le segment $BD = x$.

La droite sera actuellement facile à coter, en observant toutefois que la perpendiculaire demandée et l'échelle de pente du plan donné sont cotées en sens contraire (**369**).

379. Problème VI. *Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.*

Solution. (**Ep. 280**.) L'échelle de pente du plan passe par le point donné ; elle est parallèle à l'échelle de pente du plan donné P, graduée dans le même sens et de la même manière.

Au lieu de faire passer l'échelle de pente par le point donné A, on peut la mener par un point quelconque d'une horizontale passant par A et perpendiculaire à l'échelle du plan donné, donc parallèle à la trace de ce plan et, par suite, à celle du plan demandé. Cette horizontale est donc une horizontale de ce plan.

380. Problème VII. *Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à une droite donnée.*

Solution. (**Ep. 281**.) L'échelle de pente du plan sera parallèle à l'échelle de pente de la droite ; elle sera graduée en sens contraire, et sa pente est l'inverse de celle de la droite (**369**).

L'intervalle de l'échelle de pente du plan sera B C, longueur qui se détermine comme dans le problème précédent (**378**).

381. Problème VIII. *Trouver la véritable longueur d'une portion de droite.*

Solution. (**Fig. 282**. — **Ep. 283**.) 1° On détermine les cotes des points A et B, extrémités de la droite A B (**374**). La véritable longueur de la droite de l'espace, qui a A B pour projection, sera le côté du trapèze rectangle, dont les deux côtés parallèles sont les hauteurs des points A et B et dont la hauteur est A B.

2° Cette véritable longueur est encore égale à l'hypothénuse du triangle rectangle *abb'*, dont l'un des côtés de l'angle droit est la projection A B, et l'autre la différence des hauteurs des extrémités de cette droite.

Remarque. Voir les rabattements pour la solution purement graphique.

382. Problème IX. *Vérifier si une droite est parallèle à un plan.*

Solution. (Ep. 284.) Par un point quelconque A pris sur une horizontale du plan, on mène une droite parallèle à la droite donnée. Si cette parallèle est dans le plan, la droite de l'espace est parallèle à ce dernier. La droite auxiliaire est dans le plan, si la trace de cette droite est sur la trace du plan.

383. Problème X. *Vérifier si deux droites se coupent.*

Solution. On déterminera, à l'aide du problème I, la cote du point de rencontre des deux échelles de pente des droites, en considérant ce point comme situé sur chacune des deux droites. Si les cotes obtenues sont les mêmes, les droites se rencontrent.

Remarque. Une solution graphique de ce problème sera donnée dans le chapitre des rabattements.

Plans assujettis à satisfaire à diverses conditions.

---

384. Problème XI. *Par deux droites qui se coupent, faire passer un plan.*

Solution. Ep. 285. En joignant, par des droites, les cotes de même nom des deux droites données, on détermine des horizontales du plan, droites parallèles à la trace de ce plan, donc parallèles entre elles.

L'échelle de pente du plan sera perpendiculaire à la trace et à toutes les horizontales ainsi déterminées ; elle peut être menée par un point quelconque de cette trace, et sera graduée aux points de rencontre avec les horizontales du plan.

385. Problème XII. *Par un point et une droite, mener un plan.*

Solution. En joignant, par une droite, le point donné à un point de la droite, on détermine une droite, facile à graduer, et qui, en rencontrant la première, détermine avec celle-ci un plan. L'échelle de pente de ce plan se construit comme au problème XI.

386. Problème XIII. *Par trois points non en ligne droite, faire passer un plan.*

I. Solution. On joint les points deux à deux et l'on détermine, comme précédemment, deux droites qui se coupent et qui déterminent un plan, dont on construit l'échelle de pente comme au problème XI.

II. Solution. On joint deux points et, par le troisième, on mène une parallèle à la droite ainsi déterminée. Ces deux parallèles déterminent un plan, dont on construit l'échelle de pente comme au problème suivant.

387. Problème XIV. *Par deux droites parallèles, faire passer un plan.*

Solution. (Ep. 286.) Les deux droites parallèles déterminent un plan. Les droites qui unissent les cotes de même nom sont des horizontales de ce plan ; elles s'appuient sur les deux droites et sont parallèles à la trace du plan.

L'échelle de pente du plan sera la perpendiculaire à ces horizontales; elle est graduée aux points de rencontre avec ces dernières.

388. Problème XV. *Par un point donné, mener un plan parallèle à deux droites données.*

Solution. Par le point, on mène deux droites respectivement parallèles aux deux droites données. Ces droites déterminent le plan (**384**).

389. Problème XVI. *Par une droite donnée, mener un plan parallèle à une autre droite donnée.*

Solution. Par un point de la première droite, on mène une parallèle à l'autre droite donnée. Le plan ainsi déterminé passe par la première droite et sera parallèle à l'autre. L'échelle de pente de ce plan se construira comme au § 384.

390. Problème XVII. *Par une droite donnée, mener un plan perpendiculaire à un plan donné.*

Solution. (**Ep. 287.**) Par un point A de la droite, on mène une perpendiculaire au plan (**38**). Cette perpendiculaire et la droite donnée déterminent le plan demandé; l'échelle de pente se construit par le problème du § 344.

Intersection de deux plans.

---

391. Problème XVIII. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un plan horizontal.*

Solution. Le plan horizontal ne peut couper le plan donné que suivant une horizontale ayant pour cote la cote du plan sécant. Cette horizontale, parallèle à la trace du plan, se projette suivant une perpendiculaire à l'échelle de pente du plan, et passe par le point de cette échelle, qui a même cote que le plan sécant.

392. Problème XIX. *Construire la droite d'intersection de deux plans quelconques.*

Solution. (**Ep. 289.**) On coupe les deux plans par une série de plans auxiliaires horizontaux.

Chacun de ces plans auxiliaires coupera chacun des plans donnés suivant une horizontale de même cote que celle du plan coupant.

Ces deux horizontales se rencontrent en un point qui appartient à la droite d'intersection des deux plans.

Vérification. Tous les points ainsi déterminés sont en ligne droite.

Cas particulier. *Les échelles de pente des deux plans sont parallèles.*

Solution. (**Ep. 288.**) Dans ce cas particulier, la solution générale n'est plus applicable.

Or, deux plans ayant des échelles de pente parallèles et différemment cotées, se rencontrent suivant une horizontale. Ces plans ont en effet des traces parallèles sur le plan de projection.

Cette horizontale, perpendiculaire aux échelles de pente, rencontre ces deux échelles en des points qui ont même cote.

Le problème est donc ramené au suivant : *Construire une perpendiculaire aux deux échelles de pente, de manière qu'aux points d'intersection x et x' les cotes soient les mêmes;* ce qui revient à dire, d'après le lemme I (**374**) :

Faire en sorte que, sur les deux échelles de pente, la perpendiculaire demandée détermine deux points x et x' tels, que les rapports des distances de ces points aux points a et b, c et d, qui terminent les intervalles dans lesquels ils sont situés, soient égaux.

Or, joignons, par des droites, les points o et o, 1 et 1, ainsi que tous les points de même cote des deux échelles de pente. Ces droites, divisant chacune des deux parallèles en segments égaux, concourent en un point S, et toute transversale partant de ce point aboutira aux échelles de pente entre deux cotes successives en des points tels, que les segments déterminés sur l'intervalle de la première échelle de pente soient proportionnels aux segments déterminés sur l'intervalle de la seconde (Géométrie plane. — Triangles semblables).

La solution du problème consiste donc à déterminer le point S, et à abaisser de ce point une perpendiculaire sur les deux échelles de pente. Cette perpendiculaire sera la droite d'intersection des deux plans.

393. Problème XX. *Construire l'intersection de deux plans, l'un d'eux étant représenté par deux droites qui se coupent.*

Solution. (**Ep. 290.**) On coupe les deux plans par une série de plans horizontaux de cotes 0, 1, 2, 3, etc. Le plan de cote zéro coupe le premier plan donné suivant une horizontale de cote zéro (**391**). Les deux droites qui déterminent le second plan sont coupées chacune en un point de cote zéro, et la droite qui unit ces points sera l'horizontale de rencontre de ce plan avec le plan coupant. Cette horizontale et celle déterminée dans le premier plan donné, sont de même cote et non parallèles; elles se rencontrent en A, trace de la droite d'intersection demandée.

On détermine, d'une manière analogue, les points B^1, C^2, D^3, etc. dont l'ensemble forme la droite demandée.

394. Problème XXI. *Construire l'intersection de deux plans, dont chacun est représenté par deux droites qui se coupent.*

Solution. (**Ep. 291**.) On coupe par une série de plans horizontaux. Chacun de ces plans coupe chacun des plans donnés suivant une droite; la rencontre de deux de ces droites, fournies par le même plan sécant horizontal, sera un point de l'intersection commune des deux plans. Ces points se déterminent comme dans le problème précédent.

—

Intersection des lignes et des plans.

—

395. Problème XXII. *Construire le point de rencontre d'une droite et d'un plan.*

Solution. Par la droite, on fait passer un plan. On construit l'intersection de ce plan avec le plan donné (**390**). La droite obtenue rencontrera la droite donnée en un point qui sera le point de rencontre de la droite et du plan.

Pour faire passer un plan par la droite donnée D, on peut prendre cette dernière pour échelle de pente du plan auxiliaire (**Ep. 292**.), ou bien faire passer par un point A^2 de D, une droite auxiliaire qui, avec D, déterminent le plan demandé (**Ep. 293**).

396. Problème XXIII. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan représenté par deux droites qui se coupent.*

Solution. Par la droite, on fait passer un plan, dont on construit la ligne d'intersection avec le plan donné. La rencontre de cette figure avec la droite donnée sera le point de rencontre de celle-ci avec le plan.

Suivant que l'on prend la droite donnée pour échelle de pente du plan auxiliaire, ou que l'on détermine ce dernier en menant, par un point de la droite donnée, une autre droite quelconque, l'épure sera celle des §§ 393 ou 394.

397. Problème XXIV. *Construire la distance d'un point à un plan.*

Solution. (**Ep. 294.**) Du point donné, on abaisse une perpendiculaire sur le plan (**378**).

On construit le pied de cette perpendiculaire (**395**).

La véritable longueur qui sépare le point donné du pied de la perpendiculaire, sera la distance du point au plan. Cette longueur se détermine par le problème du § 381.

Remarque. En prenant, comme dans notre épure, la perpendiculaire pour échelle de pente du plan auxiliaire dans la recherche de son pied, on devra employer la solution du cas particulier du § 392.

398. Problème XXV. *Construire la distance d'un point à une droite.*

Solution. (**Ep. 295.**) Par le point A, on mène un plan perpendiculaire à la droite (**380**). On détermine le point de rencontre D de ce plan avec la droite (**395** et **397**).

La droite AD, qui unit ce point au point A, sera une droite perpendiculaire à la droite donnée ; c'est la distance du point A à la droite. On en détermine la véritable longueur (**381**).

399. Problème XXVI. *Construire la plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan.*

Solution dans l'espace. Par un point A de la droite D, on mène une parallèle à la droite D'. On détermine le plan P de ces deux droites, plan parallèle à D'. D'un point B de D', on abaisse une perpendiculaire sur le plan P ; on en détermine le pied C. Par ce point et dans le plan P, on mène une parallèle CE à la droite D'; cette parallèle rencontre D en E, et la droite EF, perpendiculaire au plan P, sera la plus courte distance des deux droites.

La solution graphique de ce problème sera donnée dans le chapitre des rabattements.

400. Problème XXVII. *Par un point donné, mener une droite qui s'appuie sur deux droites données.*

Solution dans l'espace. Par le point donné A et la première droite D, on mène un plan (**385**). Par le même point A et la seconde droite D′, on mène un autre plan. Ces deux plans se rencontrent suivant une droite passant par A et qui, suffisamment prolongée, rencontrera chacune des deux droites D et D′. Elle est en effet dans un même plan avec chacune de ces droites.

Pour la solution graphique, voir les rabattements.

401. Problème XXVIII. *Parallèlement à une droite donnée, mener une droite qui s'appuie sur deux autres droites données.*

Solution dans l'espace. Parallèlement à la droite D, on mène un plan passant par la première droite donnée D′. Parallèlement à D, on mènera un plan passant par la seconde droite donnée D″. Ces deux plans se rencontrent suivant une droite parallèle à D et rencontrant D′ et D″ puisqu'elle est, avec chacune de ces droites, dans un même plan.

Pour la solution graphique, voir les rabattements.

Chapitre V.

—

Méthode des rabattements.

402. Considérations générales. — But des rabattements. — Définitions. Une figure plane est située dans un plan non parallèle au plan de projection, et doit servir de base à des opérations graphiques dictées par la solution d'un problème.

La figure plane se trouvant plus ou moins déformée lorsqu'elle est projetée sur le plan de projection, il devient parfois impossible, dans ces conditions, d'exécuter la solution graphique.

On fera tourner le plan de la figure avec celle-ci, autour de la trace de ce plan, ou autour d'une parallèle à cette trace, de manière à coucher la figure sur le plan de projection ou dans un plan parallèle à celui-ci.

Dans cette nouvelle position, il sera possible d'exécuter, sur la figure, les constructions graphiques exigées pour arriver au résultat.

Ce résultat ainsi obtenu sera ensuite ramené, avec le plan de la figure, dans la position primitive de celui-ci, et le problème sera résolu, le résultat obtenu, déterminé dans l'espace.

Cette manière d'opérer, de faire tourner un plan avec ce qu'il contient pour le coucher sur le plan de figure ou dans un plan parallèle à celui-ci, s'appelle **rabattre le plan.**

On aura opéré un **rabattement.**

Le problème a été résolu **par la méthode des rabattements.**

Le plan est rabattu autour de sa trace, ou bien autour d'une de ses horizontales, prise pour **charnière, axe de rabattement, axe de rotation** ou simplement, **axe**.

La position qu'occupe après le rabattement un point, une ligne, une figure, constitue **le rabattement de ce point, de cette ligne, de cette figure**.

L'opération de redresser le plan rabattu, de le faire revenir à sa position primitive, se nomme *relèvement*.

Relever le rabattement d'un point, d'une ligne, d'une figure, c'est passer du rabattement de ces éléments à leurs positions primitives, ou à celles qu'ils doivent occuper dans le plan qui les contient et, avec celui-ci, dans l'espace.

L'axe de rotation peut être $\left\{\begin{array}{c}\text{la trace,}\\ \text{ou}\\ \text{une horizontale}\end{array}\right\}$ du plan. Celui-ci sera $\left\{\begin{array}{c}\text{vertical}\\ \text{ou}\\ \text{quelconque.}\end{array}\right.$

403. Rabattement d'un point, d'une droite.

Si, d'un point *a* situé dans un plan vertical (**Fig. 296**), ou dans un plan quelconque (**Fig. 297**), on abaisse une perpendiculaire *a*A sur la trace MN de ce plan, et que celui-ci tourne autour de cette trace pour se rabattre sur le plan de projection P, la droite *a*A restera constamment perpendiculaire en A à MN ; elle engendrera un plan normal à cette ligne et normal à H, et la trace de ce plan sera encore une droite (*a*)A perpendiculaire à la trace MN.

Il suit, de là, ainsi que de la simple inspection des figures :

1° Que le point *a* se meut dans un plan vertical perpendiculaire à l'axe de rotation ;

2° Que son rabattement (*a*) se trouve sur une perpendiculaire à l'axe ;

3° Que cette perpendiculaire passe par la projection du point sur P ;

4° Que la distance *a*A du point à l'axe est égale à la distance A(*a*) du rabattement à cet axe ;

5° Que la distance *a*X du point *a* à un point X de l'axe est égale à (*a*)X, distance du rabattement (*a*) à ce même point X ;

6° Que l'angle aXA est le même que l'angle aX(a).

De ces propriétés, nous déduisons les principes suivants :

Principes pour rabattre un point. 1° *Le rabattement d'un point est lié à sa projection par une perpendiculaire à l'axe de rotation.*

2° *La distance du point rabattu à l'axe est égale à la distance du point de l'espace à cet axe.*

3° *Les distances du point à l'axe ou à un point fixe de cette ligne, ne changent pas de longueur pendant le rabattement.*

Principe pour rabattre une droite. *Une droite aX d'un plan rencontre l'axe de rotation au même point et sous le même angle que le rabattement (a)X de cette droite.*

Remarque. Les raisonnements précédents et les principes qui en découlent, s'appliquent également au cas particulier où l'axe de rotation est une horizontale du plan, le mouvement de ce plan s'arrêtant dès que ce dernier est devenu horizontal.

Notations. Nous marquerons le rabattement d'un point a, b, etc. ou d'une droite d, e, etc. par la lettre qui caractérise ce point ou cette droite, et nous placerons cette lettre entre parenthèses.

(a), (b), etc. désignent donc les rabattements des points a, b, etc. de l'espace.

(d), (e), etc. sont les rabattements des droites désignées dans l'espace par (d), (e), etc.

—

Problèmes fondamentaux servant de base aux solutions par rabattement.

—

404. Premier problème fondamental. *Construire le rabattement d'un point situé dans un plan vertical.*

I. La trace-projection de ce plan étant prise pour axe.

Solution. (Fig. 298.) (Ep. 299.) La cote du point A étant donnée, on mènera, par la projection cotée de A, une perpendiculaire à la trace-projection de ce plan, et l'on portera sur cette ligne une longueur, contenant autant de fois l'unité de hauteur qu'il y a d'unités dans la cote du point A. L'extrémité (A) de cette perpendiculaire sera le rabattement du point A dont A^3 est la projection cotée sur P (**403**).

Remarque. Le rabattement peut se faire à gauche ou à droite de l'axe de rotation.

II. Une horizontale de cote *b* étant prise pour axe de rotation.

Solution. (Fig 300.) Le plan vertical qui contient le point *a* de cote *h* tournera autour de l'horizontale BM de cote *b*, jusqu'à ce qu'il soit devenu horizontal. Le point *a* sera alors en (*a*), sur une perpendiculaire élevée en a^b à BM, perpendiculaire qui est égale à aa^h — a^h a^b, ou égale à la différence *h-b* des cotes du point donné et de l'horizontale MB.

Comme (*a*), ainsi que a^b(*a*), se projettent sans altération de position relative ou de grandeur sur P, on voit, **Ep. 301**, que pour avoir le rabattement (*a*), il faut élever en a^h, projection du point, une perpendiculaire à la trace-projection du plan, égale à $a^h(a)=h\text{-}b$.

Remarque. Le rabattement s'opérant dans la direction marquée par la flèche, le rabattement du point *a* sera à droite ou à gauche de la trace-projection du plan, suivant que la cote *b* est plus petite ou plus grande que la cote *h*.

405. Problème réciproque. *Le rabattement d'un point situé dans un plan vertical étant donné, retrouver la projection de ce point.*

I. La trace-projection du plan étant prise pour axe.

Solution. (Ep. 302.) Le rabattement (*a*) étant lié à la projection du point *a* par une perpendiculaire à l'axe de rotation, cette projection sera en a^x, pied de la perpendiculaire abaissée de (*a*) sur la trace-projection du plan vertical qui contient le point. La cote *x* de *a* sera un nombre qui contient autant d'unités que la longueur (*a*) a^x contient de fois l'unité de hauteur.

II. Une horizontale de cote *b* du plan étant prise pour axe.

Solution. (Ep. 301.) Le rabattement (*a*) étant lié à la projection du point par une perpendiculaire à l'axe, cette projection sera en a^x, pied de la perpendiculaire abaissée de (*a*) sur la trace-projection du plan vertical qui contient le point. La cote x de ce point sera égale à b, cote de l'axe de rotation, augmentée du nombre qui exprime, en unités de hauteur, la longueur a^x (a).

406. Deuxième problème fondamental. *Construire le rabattement d'une droite située dans un plan vertical.*

Solution. I. La trace-projection du plan est prise pour axe. (Ep. 303.)

On construit le rabattement de deux points de la droite (**404**). Ou bien, on se contente du rabattement (b) du point b, que l'on unit au point a^o, trace de la droite, et, par suite, son propre rabattement.

II. Une horizontale de cote *b* est prise pour axe. (Ep. 304.)

On construit le rabattement de deux points. (**404** — II.) Ou bien, on construit le rabattement du point a, que l'on unit au point de l'échelle de pente de la droite qui a pour cote b, la projection b de ce point étant son propre rabattement. (**404**. — II.)

Remarque. La figure **300** nous montre que le rabattement de la trace de la droite doit être à gauche de l'axe, et à une distance de celui-ci égale à b, cote de l'axe.

407. Problème réciproque. *Une droite située dans un plan vertical est rabattue sur le plan de projection, trouver sa projection.*

I. La trace-projection du plan projetant étant prise pour axe.

Solution. (**Ep. 305.**) On relève deux points de la droite (**405**). Ou bien, on en relève un seul, et l'on prolonge le rabattement (A) (B) de la droite, jusqu'à ce qu'il rencontre l'axe de rotation en un point T. Ce point est resté immobile pendant le mouvement de rotation, c'est la trace de la droite de l'espace sur P.

II. Une horizontale de cote *b* du plan étant prise pour axe.

Solution. (**Ep. 306.**) On redressera deux points quelconques (A) et (C) de la droite rabattue. (**405**. — II.) Ou bien, on se contente du relèvement d'un seul de ces points, que l'on unit au point de cote b de l'axe. Ce point est un point de la droite.

La cote zéro de la droite correspond au point du rabattement de la droite, qui est à une distance b de l'axe de rotation. (**406**. — **Remarque**.)

408. Troisième problème fondamental. *Construire le rabattement d'un point situé dans un plan quelconque.*

I. La trace de ce plan étant prise pour axe de rotation.

Solution. (**Fig. 307**. — **Ep. 308**.) De la projection a^x du point a, on abaisse une perpendiculaire sur la trace MN du plan, l'axe de rotation. On prolonge cette perpendiculaire au delà de MN d'une quantité égale à $A'(a) = a\ A'$, véritable longueur de la distance du point a à l'axe de rotation.

Cette distance est une droite d'un plan vertical, et peut se construire en A′ (a'), par un rabattement auxiliaire autour de la trace-projection de ce plan prise pour charnière. (**406**. — II.)

II. Une horizontale de cote b du plan étant prise pour axe de rotation.

Solution. (**Fig. 309**. — **Ep. 310**.) Le plan étant rabattu sur le plan horizontal H′, de même cote que l'horizontale MN, la projection (a) sur P de ce premier rabattement (a'), sera sur la perpendiculaire abaissée de la projection a^x du point, sur la projection M′N′ de l'horizontale MN, et à une distance $B(a)$ de cette projection M′N′, égale à la véritable distance $aB' = B'(a')$.

Or $B'(a') = B'(a'')$ s'obtient par un rabattement auxiliaire sur H′ autour de B′A′ (**406**.—**I**.) Dans l'épure 310, la cote de l'horizontale étant $b=2$, la longueur $a\ 3^1\!/_2\ (a'')$, dans le rabattement auxiliaire, sera égale à $1^1\!/_2$ = cote $h\ 3^1\!/_2$ du point a, moins la cote $b = 2$ de l'horizontale prise pour axe.

Remarques. I. Le mouvement de rotation du plan s'opérant dans la direction indiquée par la flèche, le rabattement du point a est à droite, à gauche ou sur la projection de l'horizontale, axe de rotation, suivant que la cote b de l'horizontale est plus petite ou plus grande que la cote de a, ou égale à cette cote. Dans ce dernier cas, le point a est lui-même sa projection et son rabattement.

II. La perpendiculaire abaissée du point a sur la trace ou sur une horizontale du plan, est une ligne de plus grande pente de ce dernier. Son rabattement autour de sa trace-projection sera parallèle au rabattement de l'échelle de pente du plan autour de la trace-projection du plan qui la contient.

409. Problème réciproque. *Étant donné le rabattement d'un point situé dans un plan oblique, trouver sa projection.*

I. La trace horizontale du plan étant prise pour axe de rotation.

Solution. (Ep. 311.) Le rabattement (a) est lié à la projection du point par une perpendiculaire à l'axe de rotation. Le point a de l'espace se trouve dans le plan, sur une ligne de plus grande pente passant par A', et, sur cette ligne, à une distance (a) A' de ce point. Or, cette ligne de plus grande pente se rabat autour de $A'a^x$ suivant $A'(a')$, parallèle à l'échelle de pente rabattue, donc parallèle à mn. Portons sur $A'(a')$, la longueur $A'(a)$, et le point (a') relevé en a^x, donnera en ce point la projection du point, dont (a) est le rabattement.

II. Une horizontale du plan étant prise pour axe de rotation.

Solution. (Ep. 312.) Le rabattement a été opéré autour de l'horizontale BB de cote 2. En suivant le raisonnement précédent, on trouvera, pour projection du point rabattu en (a), le point a. Sa cote est égale à 2, augmenté de la longueur $A'(a) = A'(a')$ exprimée en unités de hauteur.

410. Quatrième problème fondamental. *Construire le rabattement d'une droite située dans un plan quelconque.*

I. La trace de ce plan étant prise pour axe de rotation.

Solution. (Ep. 313.) La droite AB, située dans le plan, aura sa trace B sur la trace du plan. On construira le rabattement de deux points de la droite (**408—I**). Ou bien, on ne construit que le rabattement d'un seul point A que l'on unit au point B, trace de la droite et, par suite, son propre rabattement.

II. Une horizontale de cote *b* du plan étant prise pour axe de rotation.

Solution. (Ep. 314.) La droite $A^4\ B^0$ du plan est à rabattre autour de l'horizontale H^2 de ce plan. On rabat en (A) le point A (**408. — II.**), et l'on unit (A) au point C de cote 2, c'est-à-dire au point d'intersection de la droite AB avec H^2. Ce point, étant sur la charnière, sera son propre rabattement.

Le rabattement de la trace B de la droite est en (B), vu que AB a tourné autour de H^2, et que le point c est resté fixe. Les trois points (A), C^2 et (B) sont en ligne droite.

411. Problème réciproque. *Etant donné le rabattement d'une droite située dans un plan quelconque, retrouver sa projection.*

I. La trace de ce plan étant prise pour axe de rotation.

Solution. (**Ep. 315.**) On prolonge le rabattement de la droite jusqu'à la rencontre en B avec l'axe de rotation; B sera la trace de la droite. Un autre point se retrouve à l'aide du § **409**, II cas.

II. Une horizontale H^2 **du plan étant prise pour axe de rotation.**

Solution. (**Ep. 316.**) On prolonge le rabattement de la droite jusqu'en C, point de rencontre avec l'axe de rotation; ce point est la projection du point C^2 de la droite. On unit ce point à un deuxième point A relevé par la méthode du § **409**, II cas.

Applications. — Problèmes.

Angles. — Véritable longueur d'une droite.

—

412. Problème I. *Etant données une droite par son échelle de pente et la projection non cotée d'un point de cette droite, trouver la hauteur de ce point au-dessus du plan horizontal.*

Solution. (**Ep. 317.**) On rabat la droite dans le plan horizontal autour de son échelle de pente prise pour axe de rotation (**406**). Le point de la droite, dont c est la projection, se trouve rabattu en (c); $c\ (c)$ est la hauteur de ce point au-dessus du plan de projection.

413. Problème II. *Une droite étant donnée par son échelle de pente, trouver la projection d'un de ses points dont la hauteur au-dessus du plan de projection est donnée.*

Solution. (Ep. 318.) On opère le rabattement de la droite sur le plan horizontal autour de l'échelle de pente prise pour axe (**406**). Sur ce rabattement, on détermine le point x, à une distance donnée A h de l'axe. On relève le point (x) en x, point qui sera la projection demandée (**405**).

414. Problème III. *Trouver la véritable longueur d'une portion de droite, ainsi que son angle de pente.*

Solution. (**Ep. 319.**) La droite rabattue dans le plan de projection autour de son échelle de pente prise pour axe fait, avec cet axe, un angle qui est son angle de pente.

La véritable longueur de la portion de droite A B se rabat en (A) (B).

415. Problème IV. *Construire l'angle de pente d'un plan.*

Solution. La ligne de plus grande pente du plan rabattue autour de l'échelle de pente de ce plan, fait avec celle-ci un angle qui est l'angle de pente du plan.

416. Problème V. *Deux droites qui se coupent étant données par leurs échelles de pente, trouver l'angle de ces deux droites ainsi que la bissectrice de cet angle.*

Solution. (**Ep. 320.**) Les deux droites déterminent un plan dont BC est la trace. Autour de cette trace, on rabat le point d'intersection A des deux droites. L'angle B(A)C sera l'angle de ces droites.

La bissectrice A(D) de cet angle se relève en AD, D restant fixe et (A) se relevant en A (**409**). Cette bissectrice se trouvera cotée par les horizontales du plan dans lequel elle est située.

417. Problème VI. *Angle d'une droite et d'un plan.*

Solution. (**Ep. 321.**) D'un point A^3 de la droite, on abaisse une perpendiculaire sur le plan (**378**). On construit l'angle de cette perpendiculaire et de la droite (**416**) ; cet angle sera le complément de l'angle que fait la droite avec le plan.

418. Problème VII. *Angle de deux plans.*

Solution. (**Ep. 322.**) D'un point quelconque A^3 de l'espace, on abaisse une perpendiculaire sur chacun des deux plans donnés (**378**). On construit l'angle de ces deux droites ; le supplément de cet angle ainsi trouvé sera l'angle plan correspondant du dièdre formé par les deux plans donnés.

419. Problème VIII. *Trouver la distance d'un point à un plan.*

Solution. (**Ep. 323.**) Du point A^4 donné, on abaisse une perpendiculaire sur le plan (**378**). On détermine le point de rencontre P de cette perpendiculaire avec le plan. La véritable longueur de PA se déterminera, non plus comme au § **381**, mais par un rabattement de PA autour d'une horizontale de cote 2 de son plan projetant (**406.-II**).

420. Problème IX. *Distance de deux plans parallèles.*

Solution. (**Ep. 324.**) D'un point quelconque A^3, on abaisse une perpendiculaire sur chacun des deux plans. On détermine les pieds P et P' de ces perpendiculaires sur ces plans, et l'on construit, par rabattement, la véritable longueur de la distance PP', la projection PP' étant prise pour axe de rotation.

421. Problème X. *Distance d'un point à une droite.*

Solution. Par le point donné A, on mène un plan perpendiculaire à la droite (**380**). On détermine le point de rencontre P de ce plan avec la droite. La véritable longueur de la portion de droite AP mesurera la distance du point A à la droite donnée.

422. Problème XI. *Distance de deux droites parallèles.*

Solution. On construit un plan perpendiculaire aux deux droites ; on détermine les points de rencontre P et P' du plan et des droites. La véritable longueur de PP' mesure la distance des deux droites parallèles.

Les épures des §§ 421 et 422 se déduisent facilement de celles des §§ 419 et 420.

—

Problèmes et exercices.

—

423. Problème XII. *Par un point donné, mener une droite qui s'appuie sur deux droites données.*

Solution. (Ep. 325.) Par le point A^3 donné et par la première droite D, on mène un plan (**385**). Par A^3 et la seconde droite D', on mène un autre plan. Ces deux plans se rencontrent suivant une droite qui doit passer par le point donné. Comme cette droite est avec D dans un même plan, elle rencontrera D, à moins de lui être parallèle. Il en sera de même pour la droite D'.

Vérifications. La droite ainsi construite doit rencontrer D. Soit B ce point de rencontre. Pour que la droite rencontre réellement D au point B, il faut, qu'en ce point, la cote de B, considéré comme appartenant à la droite construite, soit la même que la cote du même point supposé appartenir à D. On construira les cotes de B dans ces deux hypothèses par rabattement (**412**).

On fera les mêmes constructions et vérifications pour le point C.

424. Problème XIII. *Parallèlement à une droite donnée* D, *mener une droite qui s'appuie sur deux droites données* D′ *et* D″.

Solution. (**Ep. 326**.) Parallèlement à D, on mène un plan qui passe par D′ (**389**). Parallèlement à D, on mène un autre plan qui passe par D″.

Ces deux plans se rencontrent suivant une droite parallèle à D, laquelle droite, étant dans un même plan avec D′ et dans un autre plan avec D″, rencontrera chacune de ces droites à moins de leur être parallèle.

Vérifications. On vérifiera si les points de rencontre A et B ont même cote sur les deux droites (Voir problème précédent).

425. Problème XIV. *Construire la plus courte distance entre deux droites non situées dans un même plan.*

Solution. (**Fig. 327. — Ep. 328.**) Par un point A de la première droite D, on mène une parallèle à la seconde droite donnée D′. On déterminera de cette manière un plan Q, dont on construit l'échelle de pente. Ce plan est parallèle à D′. D'un point B de la seconde droite, on abaisse une perpendiculaire sur ce plan. Par P, pied de cette perpendiculaire, on mène une droite PP′ parallèle à D′ ; cette droite sera dans le plan et rencontrera D en P′ ; la perpendiculaire P′B′, élevée en P′ sur le plan Q, sera perpendiculaire à D et à D′, donc cette droite est la plus courte distance des deux droites données (**399**).

Vérifications. La droite B′P′ doit être égale, en véritable longueur, à la droite BP. On construira donc la véritable longueur de chacune de ces deux droites, et l'on vérifiera si ces longueurs sont les mêmes.

426. Problème XV. *Par un point d'un plan, mener, dans ce plan, une droite faisant un angle* α *avec les horizontales du plan.*

Solution. (**Ep. 329.**) On rabat le plan avec le point donné A^2 dans le plan horizontal, la trace du plan étant prise pour axe. Comme toutes les horizontales du plan sont parallèles à sa trace, le rabattement de la droite demandée fera avec elles et avec la trace du plan l'angle α.

Donc, par (A), rabattement de A^2, on mène une droite faisant l'angle donné avec la trace du plan. Cette droite rencontre la trace au point X et ce point, joint à A^2, sera la droite demandée. Elle sera cotée par les horizontales du plan.

427. Problème XVI. *Par un point d'un plan, mener, dans ce plan, une droite faisant un angle donné avec une autre droite de ce plan.*

Solution. (Ep. 330.) On rabat le plan avec le point et la droite donnés dans le plan de projection, la trace du plan donné étant prise pour axe. Par le rabattement (A) du point A^2, on mènera une droite faisant l'angle voulu avec la droite rabattue, et rencontrant celle-ci en un point (M) et la trace du plan au point X.

La droite (A)(M)X relevée donnera A^2MX pour la droite demandée.

Cette droite devra passer par les trois points X, M et A^2, relevés chacun séparément.

428. Problème XVII. *Par un point d'un plan, mener, dans ce plan, une droite dont la pente est donnée, ou, en d'autres termes, une droite faisant un angle donné avec le plan de projection horizontal.*

Solution. (Ep. 431.) La pente de la droite étant le rapport de la différence des cotes des extrémités de cette droite à sa projection horizontale, ou bien encore, le rapport de l'unité de hauteur à l'intervalle, on aura : intervalle $= \frac{\text{unité de hauteur}}{\text{la valeur donnée pour la pente.}}$

L'intervalle est donc connu.

Comme la droite demandée doit être dans le plan donné et passer par le point A^3 de ce plan, la trace de la droite sera sur la trace du plan, en un point, qui est à une distance du point A^3 égale à 3 fois l'intervalle calculé.

Donc, de ce point comme centre, avec 3 fois l'intervalle comme rayon, nous décrirons un arc de cercle. Cet arc de cercle rencontre la trace du plan en un point qui, avec A^3, déterminent la droite demandée.

Autre solution. La pente de la droite est encore connue quand on donne l'angle α que la droite doit faire avec sa projection.

L'unité de hauteur connue, on construira un triangle rectangle ACB, ayant cette unité CB pour côté de l'angle droit, et un angle aigu égal à α. L'hypothénuse de ce triangle sera le rabattement d'une droite, ayant la pente donnée, autour de sa projection AB, l'intervalle de la droite en projections cotées. L'intervalle connu, la solution est ramenée à la solution précédente.

Remarque. Suivant que A^3P (trois fois l'intervalle) est plus grand que *pa* (trois fois l'intervalle de l'échelle de pente du plan), égal à cette ligne, ou plus petit que cette dernière, il y aura deux solutions, une solution, ou le problème sera impossible.

Or, l'unité de hauteur étant la même pour l'échelle de pente du plan et pour celle de la droite, on voit que la grandeur des intervalles dépend des angles que les échelles de pente du plan et de la droite font avec leurs projections. Si α' est l'angle de pente du plan, on voit que

si $\alpha < \alpha'$, le problème admet deux solutions ;

si $\alpha = \alpha'$, le problème n'admet qu'une solution, une droite parallèle à l'échelle de pente du plan,

et si $\alpha > \alpha'$, le problème est impossible.

429. **Problème XVIII**. *En un point d'une droite, élever à cette droite, une perpendiculaire faisant un angle donné α avec le plan horizontal.*

Solution. (**Ep. 332**.) Au point B, on construit un plan perpendiculaire à la droite donnée (**400**). Ce plan est le lieu géométrique de toutes les perpendiculaires à la droite donnée et passant par B. La droite demandée sera donc dans ce plan, et fera un angle α avec le plan de projection ; elle sera construite par le problème précédent.

Comme cette droite doit faire un angle α avec le plan horizontal, donc avec sa projection, la longueur DE sera son intervalle.

Du point B^3 donné, avec trois fois DE comme rayon, on décrira un arc de cercle, lequel arc coupera en C la trace du plan, et BC sera une droite qui satisfait aux conditions du problème.

Remarque. Il y a deux solutions ou une seule, si α est $<$ ou égal à l'angle de pente du plan, donc plus petit que le complément de l'angle de pente de la droite donnée ou égal à ce complément. Le problème est impossible si $\alpha >$ que le complément de cet angle de pente.

430. Problème XIX. *Par une droite donnée, mener un plan dont la pente est donnée.*

Solution. (Ep. 333.) L'angle de pente α du plan étant donné ainsi que l'unité de hauteur $h =$ CB, le côté AB du triangle rectangle ABC mesurera la longueur de l'intervalle de l'échelle de pente du plan à construire.

Ce plan passant par la droite donnée, nous pouvons faire passer son échelle de pente par un des points de cette droite, soit par le point D^3.

L'échelle passant par le point 3, le zéro de l'échelle sera à une distance du point D égale à $3 \times$ AB ; il se trouvera donc en un point de l'arc de cercle décrit du point D^3 comme centre avec $3 \times$ AB pour rayon.

Pour que la droite soit dans le plan, il faut que le zéro de la droite soit sur la trace du plan, donc sur une perpendiculaire à l'échelle de pente passant par le zéro de cette dernière.

Il suffit de mener, du point E^o, une tangente à l'arc de cercle décrit précédemment, pour avoir le point F, zéro de l'échelle de pente du plan ; ce dernier se trouvera ainsi suffisamment déterminé.

Remarque. Le problème peut admettre deux solutions, une seule solution, ou bien il est impossible, suivant que DF = 3 fois AB est plus petit que DE, égal à DE, ou plus grand que DE.

Ce qui revient à dire : que le problème est possible et admet deux solutions, si l'angle de pente du plan est plus grand que l'angle de pente α' de la droite ; il n'admet qu'une solution si $\alpha = \alpha'$, et il devient impossible si α est plus petit que α'.

FIN.

Table des matières.

LIVRE PREMIER.

PROJECTIONS ORTHOGONALES SUR DEUX PLANS RECTANGULAIRES.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

Des différentes positions du point, de la ligne droite et du plan par rapport aux plans de projections.

CHAPITRE III.

Des différentes positions que le point, la droite et le plan peuvent avoir entre eux dans l'espace.

CHAPITRE IV.

Positions particulières du point, de la droite et du plan. Plans bissecteurs. — Positions symétriques.

Positions symétriques de points, droites et plans par rapport aux plans de projection et aux plans bissecteurs.

CHAPITRE VI.

Problèmes. — Applications.

CHAPITRE VII.

Méthode des rabattements.

Problèmes. — Applications.

CHAPITRE VIII.

Changements de plans de projection.

CHAPITRE IX.

Méthode des rotations.

CHAPITRE X.

Applications.

LIVRE II.

PROJECTIONS ORTHOGONALES COTÉES.

CHAPITRE PREMIER.

Représentation du point, de la ligne droite et du plan.

CHAPITRE II.

Des différentes positions du point, de la droite et du plan par rapport au plan de projection.

CHAPITRE III.

Des différentes positions que le point, la droite et le plan peuvent avoir entre eux dans l'espace.

CHAPITRE IV.

Applications. — Problèmes.

CHAPITRE V.

Méthode des rabattements.

Applications. — Problèmes.

FIN.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR

N. BREITHOF

Commandeur de l'Ordre Royal Portugais du Christ
Ingénieur des mines et des arts et manufactures
Professeur à la faculté des sciences de l'Université de Louvain
Membre correspondant de l'Académie Royale des sciences de Madrid
de l'Académie des « Nuovi Lincei » à Rome et de l'Institut R.-G.-D. de Luxembourg, etc

PREMIÈRE PARTIE — ATLAS

POINT — LIGNE DROITE — PLAN

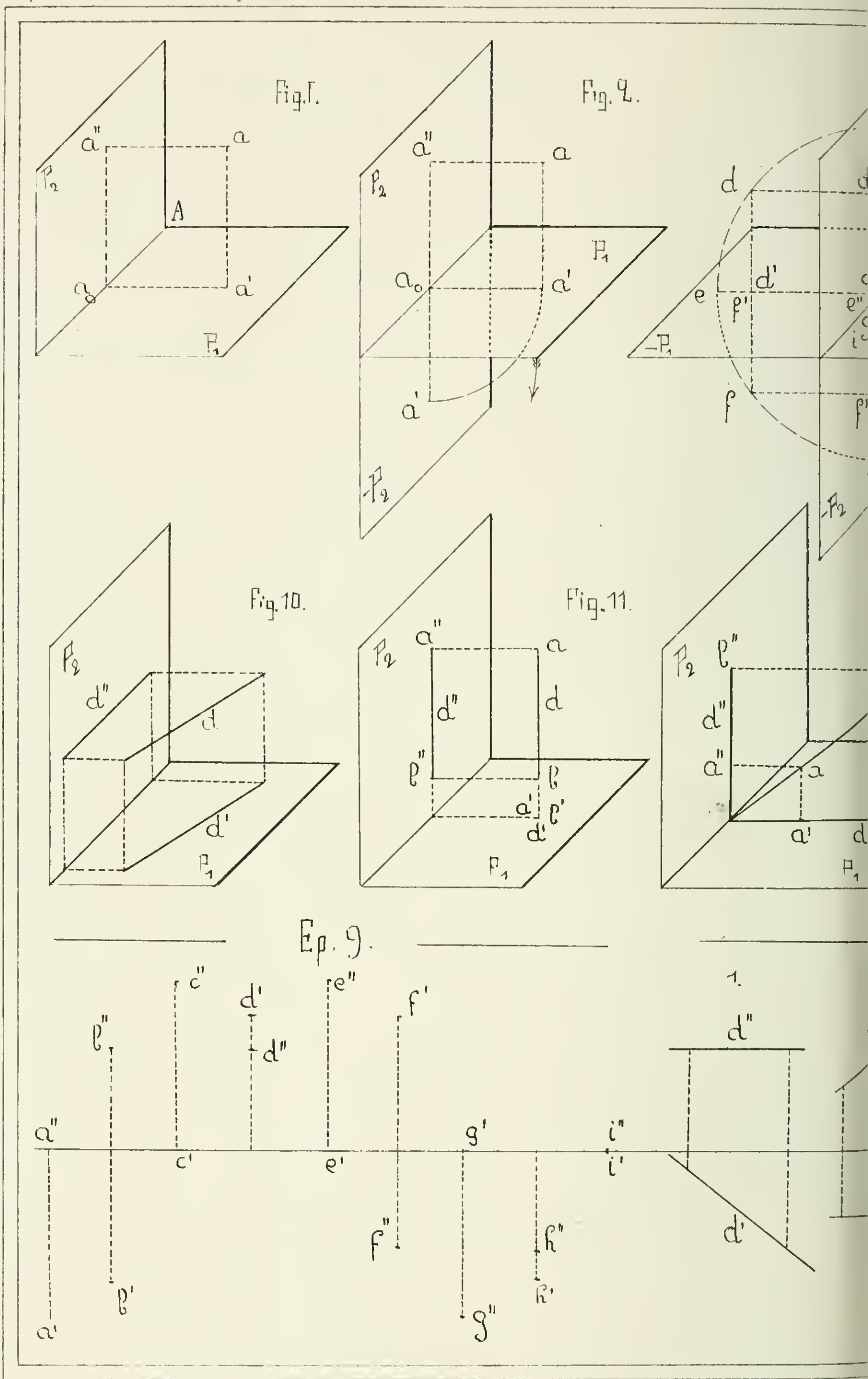
SECONDE ÉDITION

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, Imprimeur-Éditeur
Quai des Grands-Augustins, 55

LOUVAIN
D. Aug PEETERS-RUELENS
Imprimeur-Éditeur

MONS
Hector MANCEAUX
Imprimeur-Éditeur

1880



Lith J S STEVENS

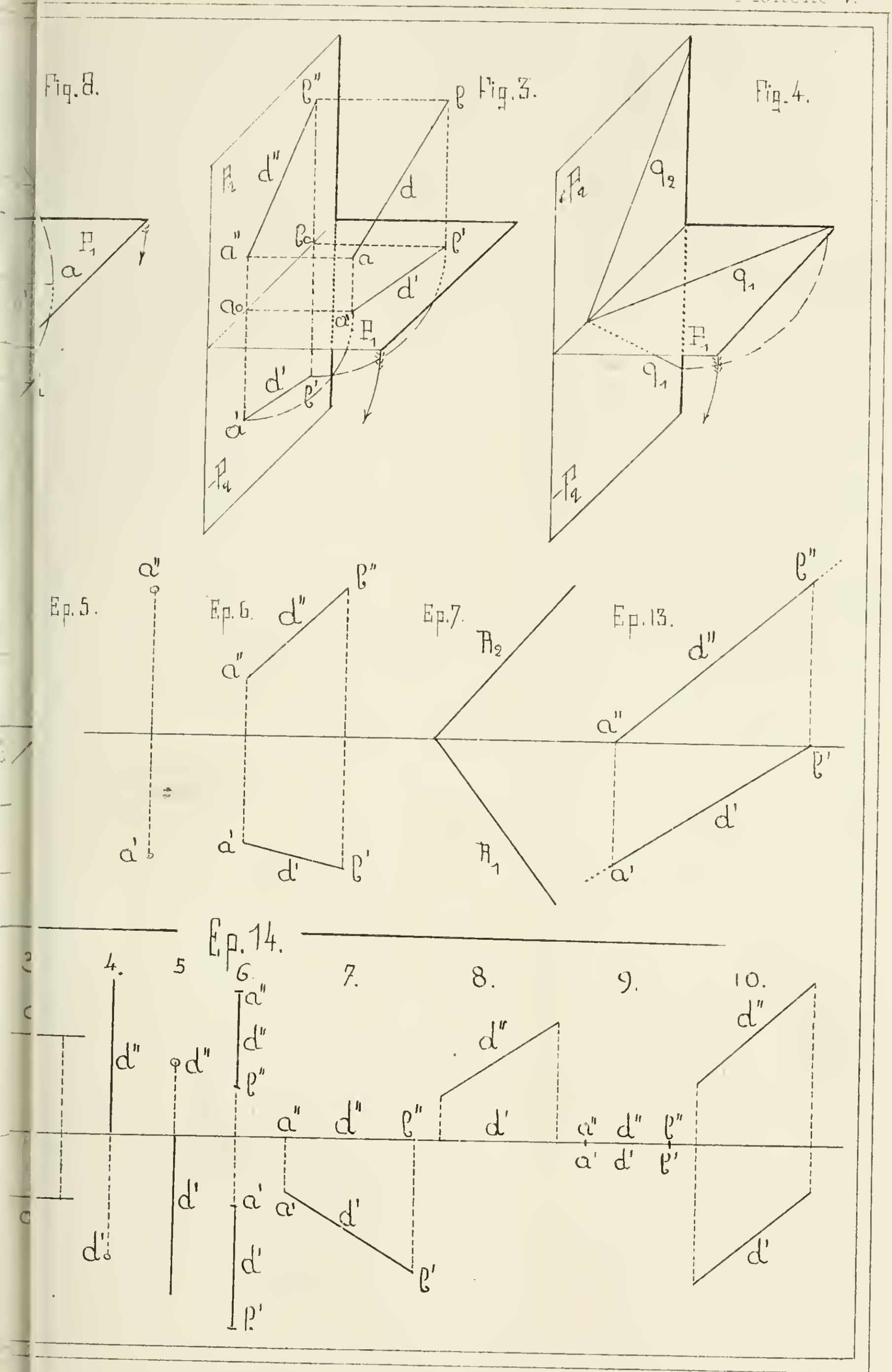
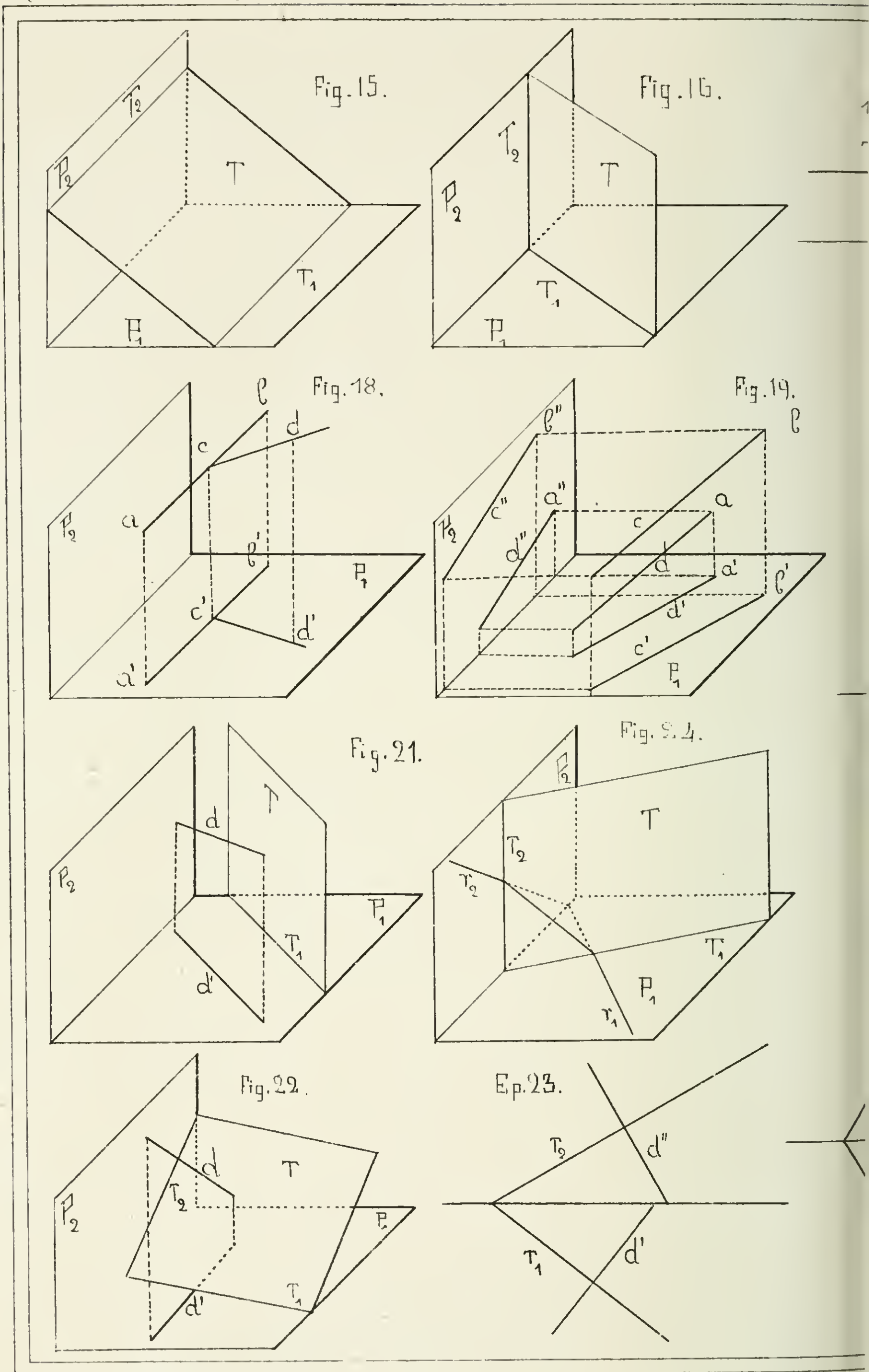
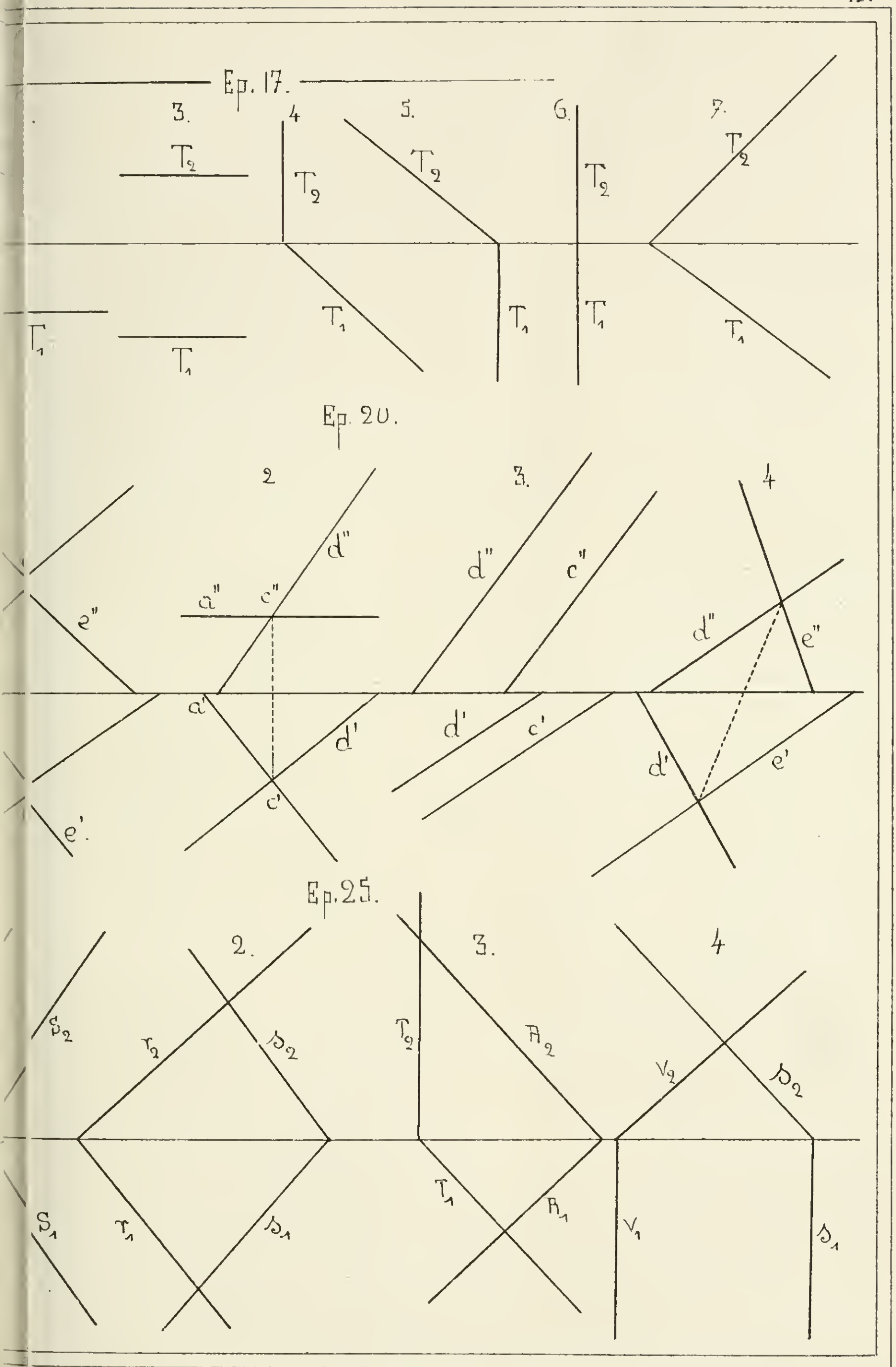


Fig. 8.
Fig. 3.
Fig. 4.
Ep. 5.
Ep. 6.
Ep. 7.
Ep. 13.
Ep. 14.
4.
5
6.
7.
8.
9.
10.



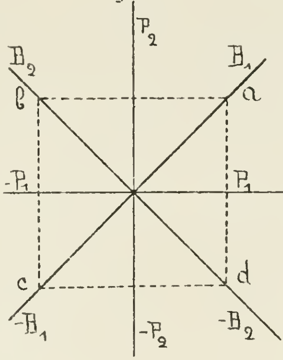
Lith J.B STEVENS. Bruxelles

Planche II.



Ep. 17.
3.
4
5.
6.
7.
T2
T1
Ep. 20.
2
3.
4
d"
a"
c"
e"
a'
d'
c'
e'
Ep. 25.
2.
3.
4
s2
r2
T2
R2
V2
S1
r1
T1
R1
V1

Fig. 26.



Ep. 27.

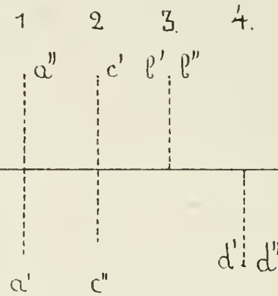


Fig. 2

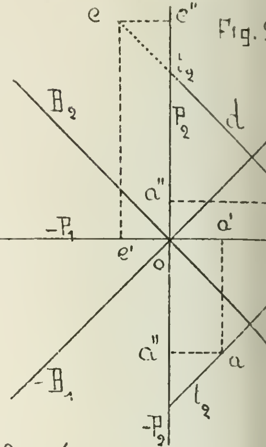
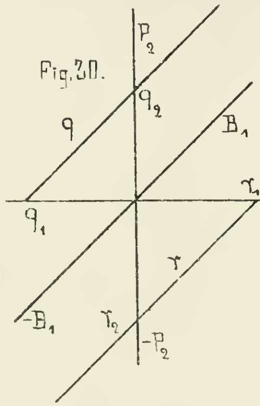


Fig. 30.



Ep. 32.

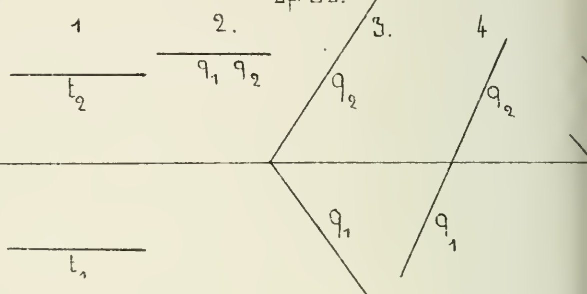
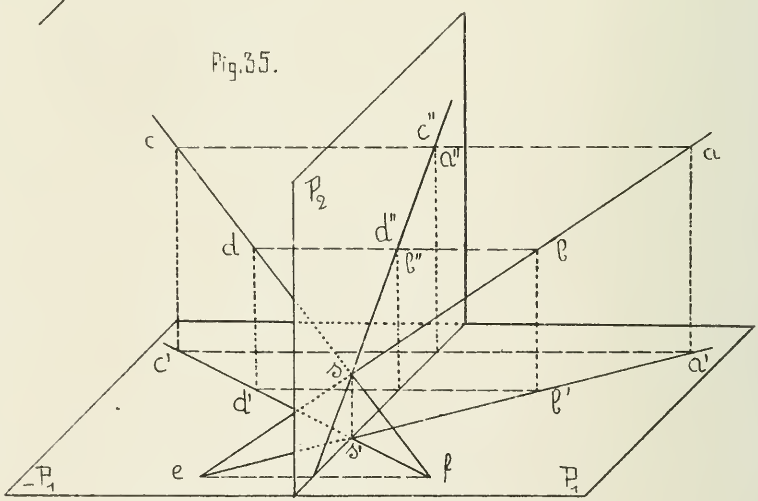
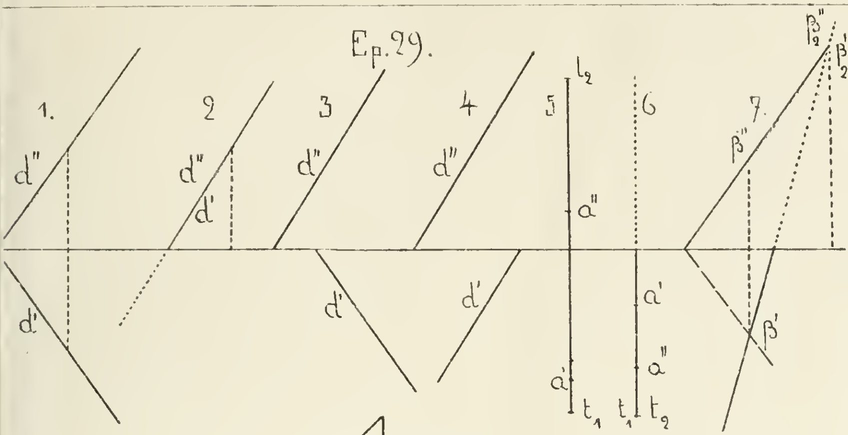


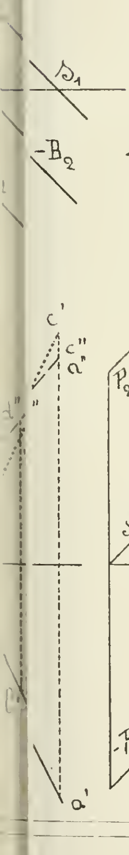
Fig. 35.



Ep. 29.



F.31.



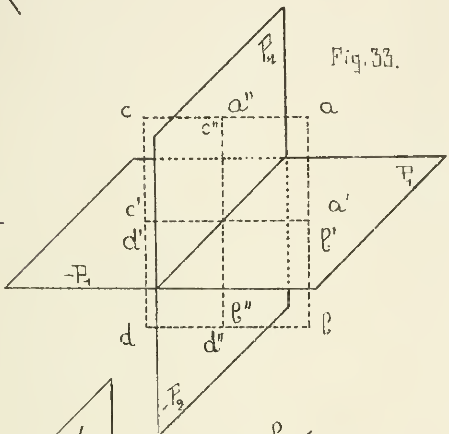
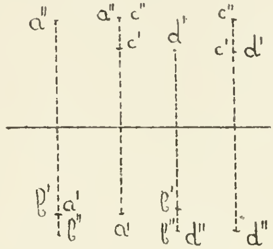


Fig. 33.

Ep. 34.



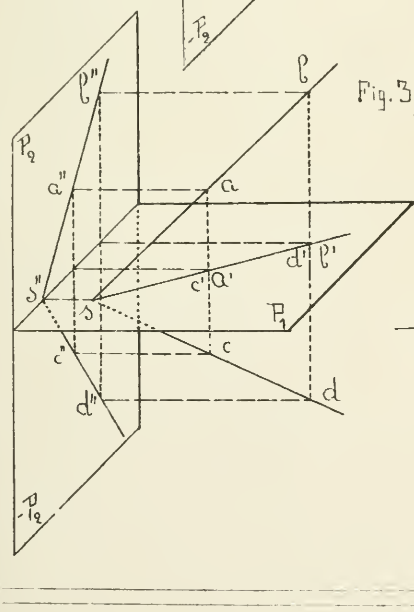
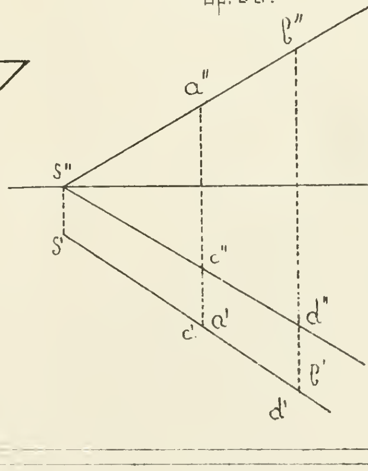
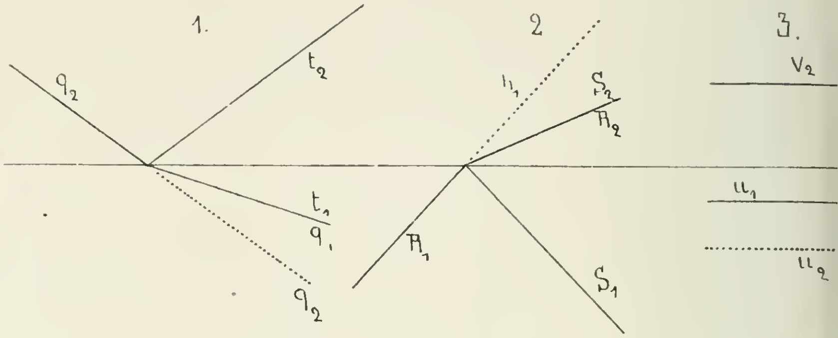


Fig. 37.

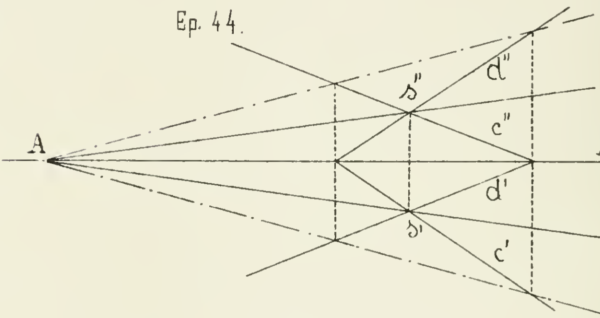
Ep. 38.



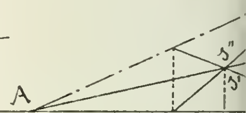
Ep. 39.



Ep. 44.



Ep. 45.



Ep. 50.

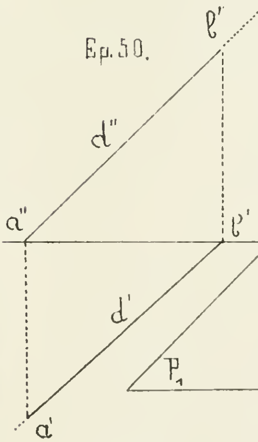
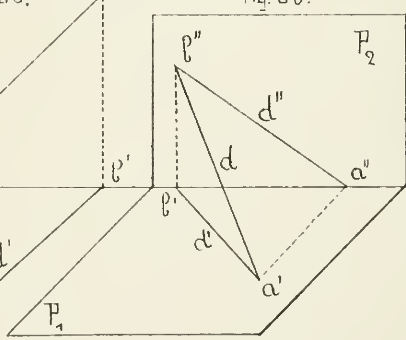
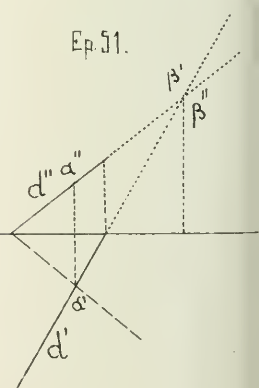


Fig. 50.



Ep. 51.



Lith J B STEVENS Bruxelles

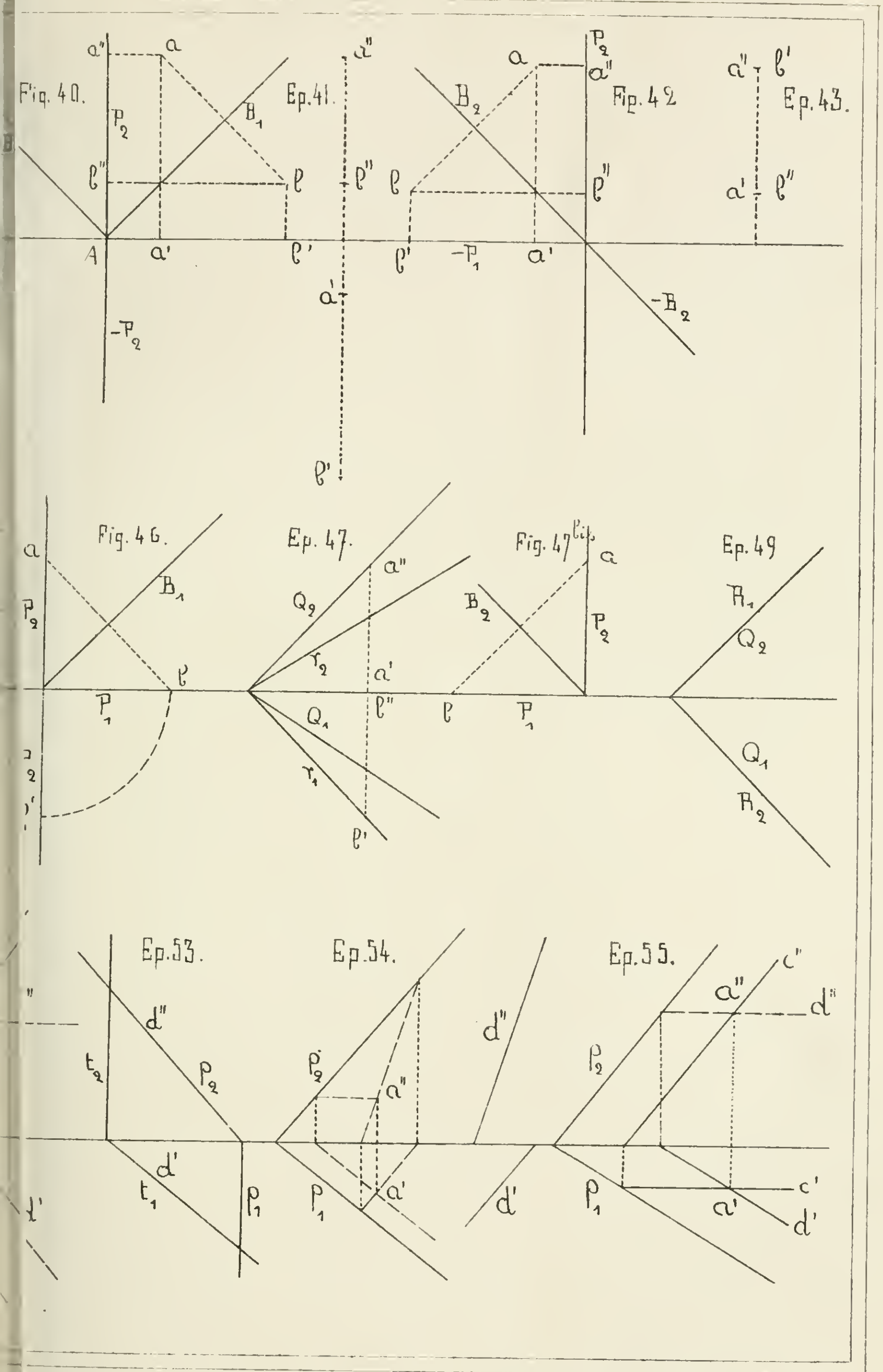
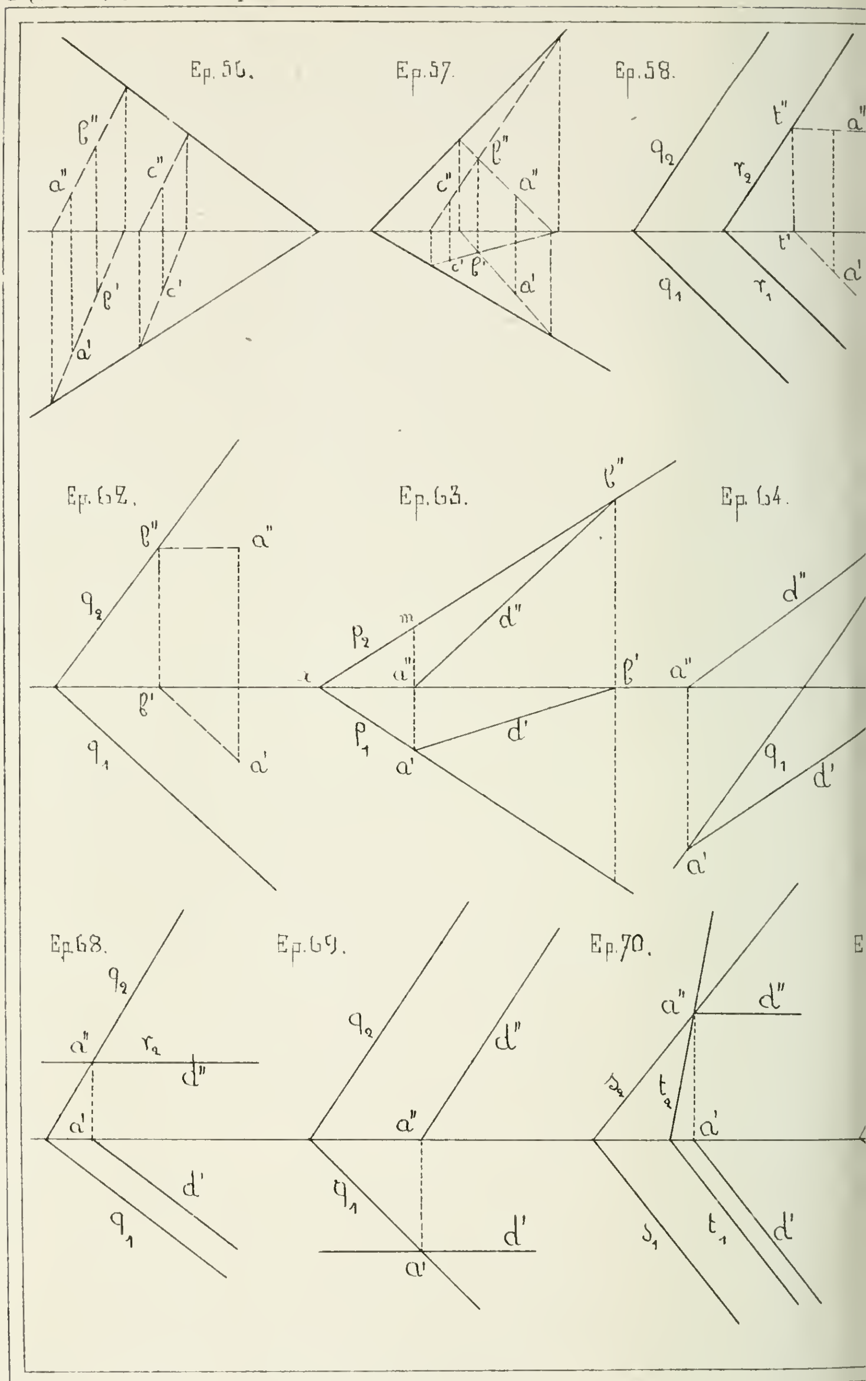
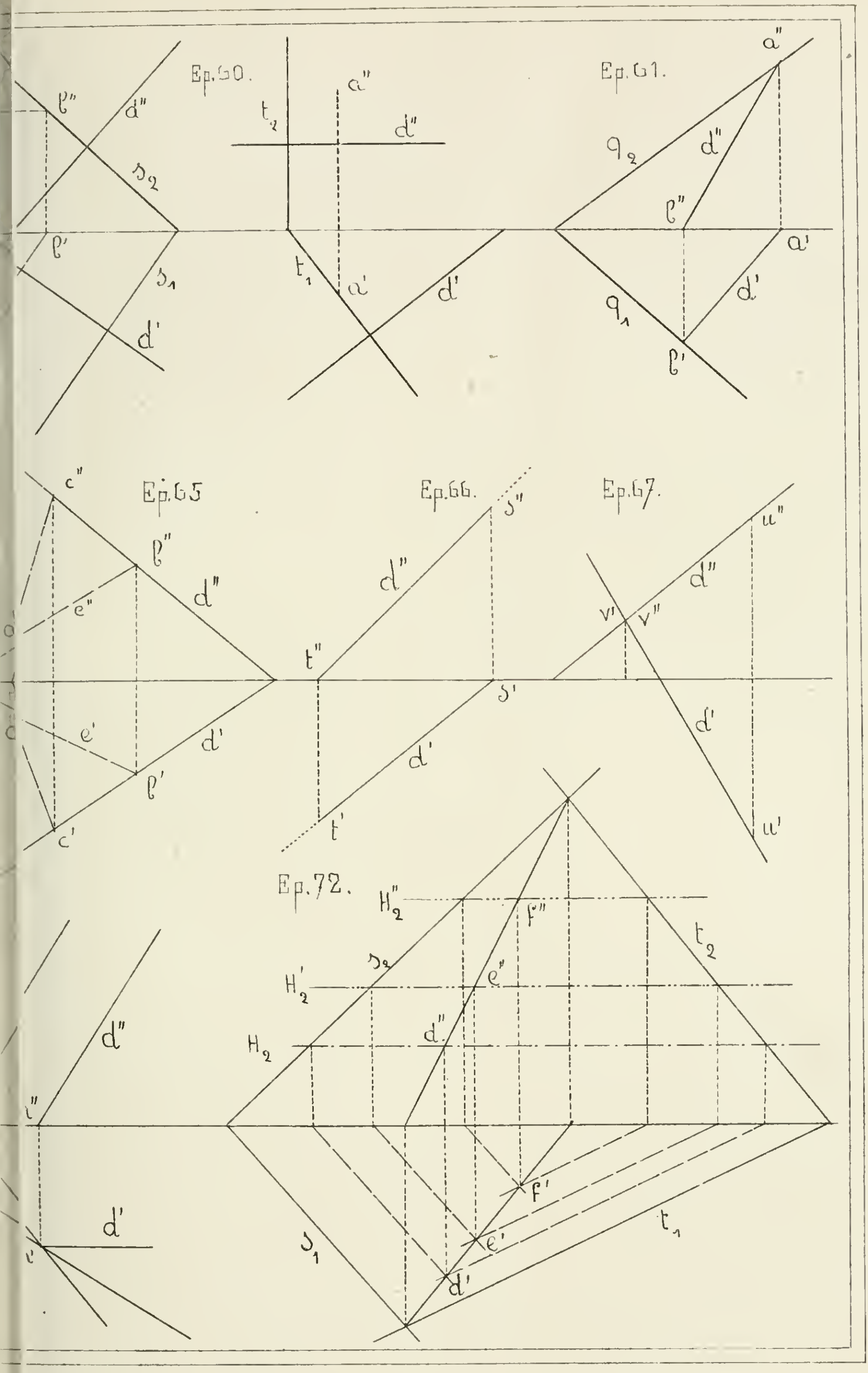


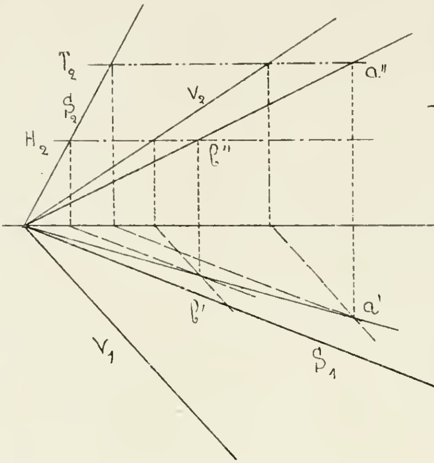
Fig. 40.
Ep. 41.
Fig. 42
Ep. 43.
Fig. 46.
Ep. 47.
Fig. 47
Ep. 49
Ep. 53.
Ep. 54.
Ep. 55.



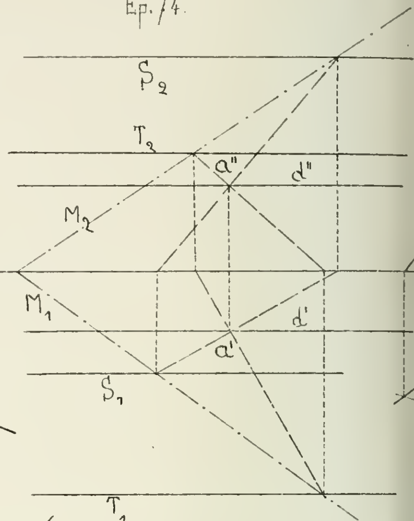
Lith. J.B. STEVENS Bruxelles


Ep.60.
Ep.61.
Ep.65
Ep.66.
Ep.67.
Ep.72.

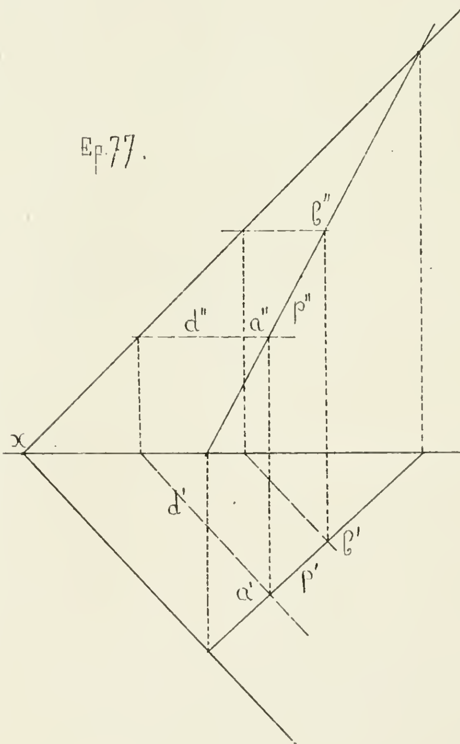
Ep. 73.



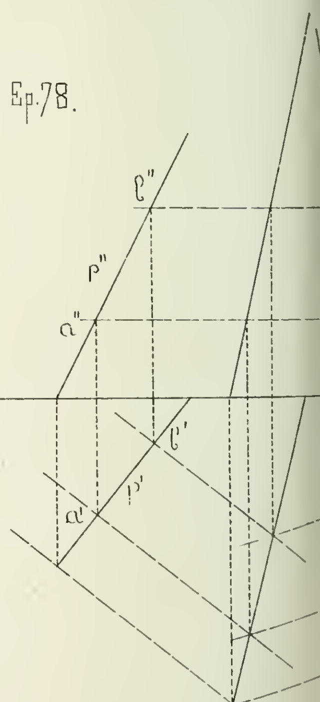
Ep. 74.



Ep. 77.

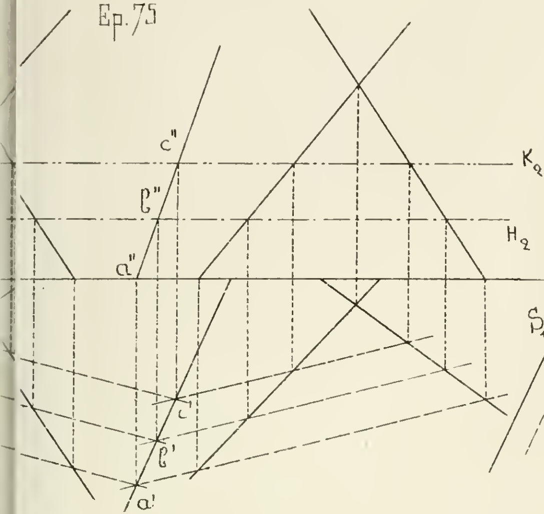


Ep. 78.

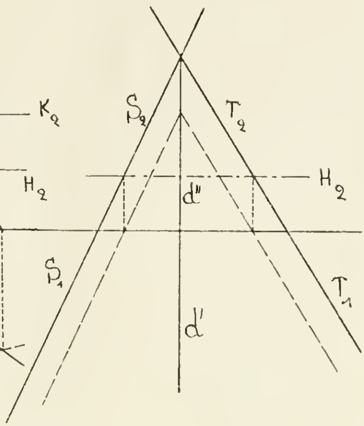


Lith. J.S. STEVENS Bruxelles

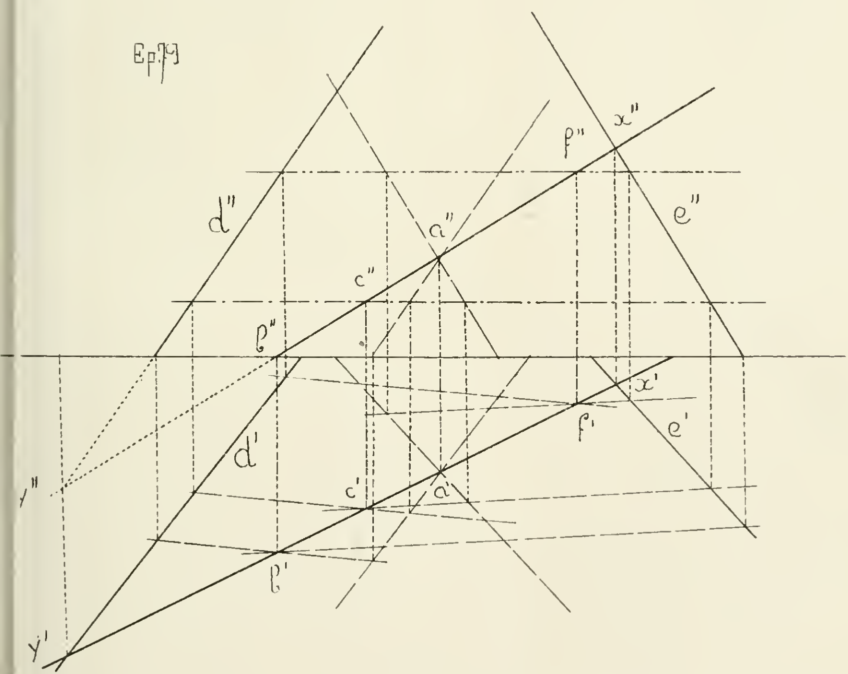
Ep. 75

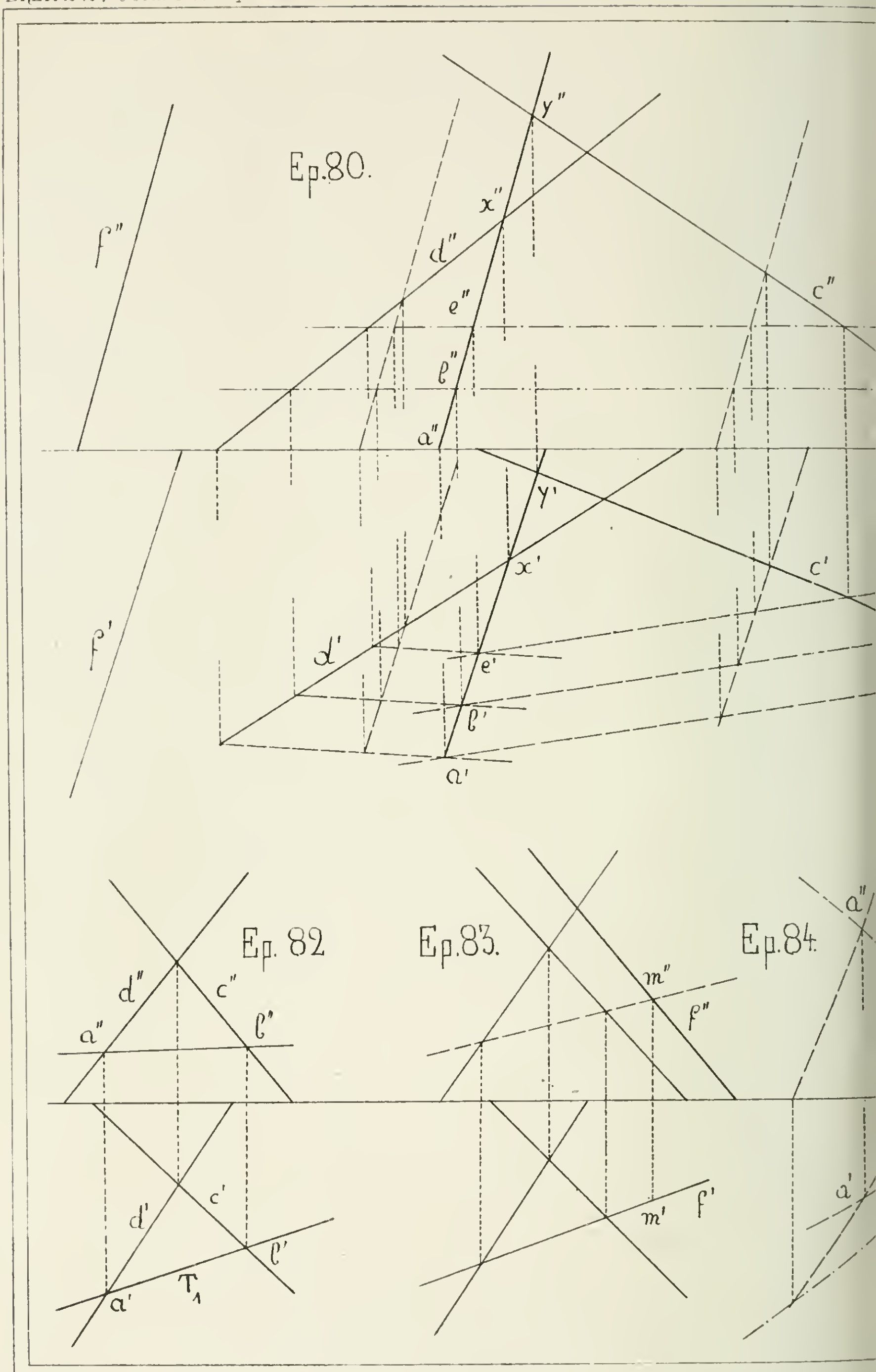


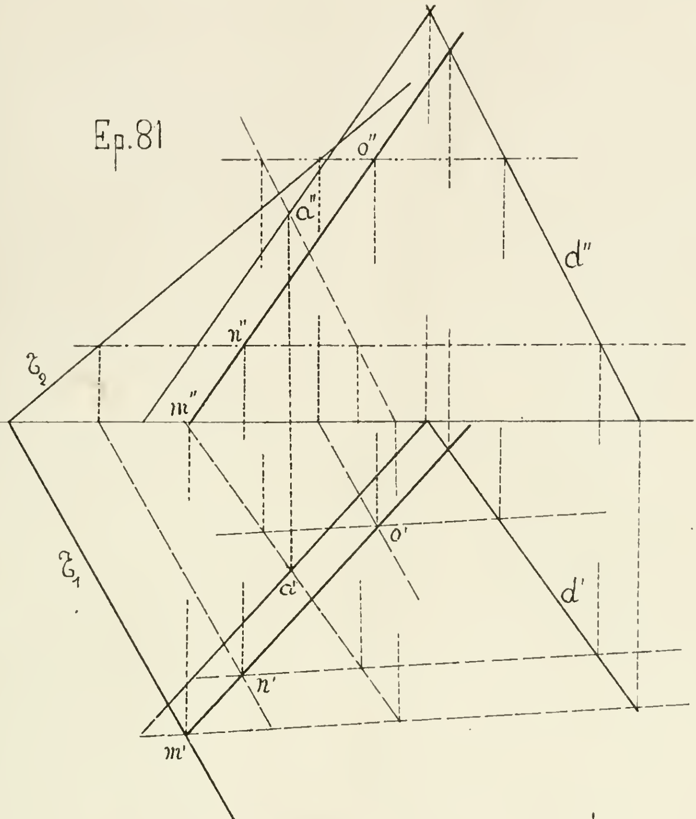
Ep. 76.



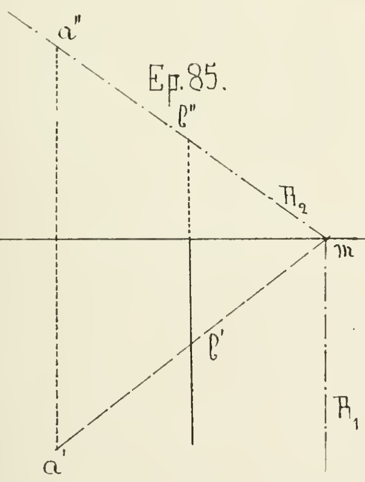
Ep. 79



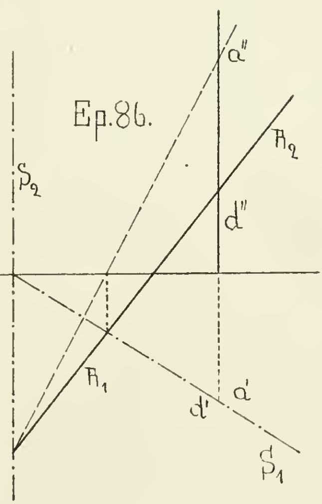

Ep.80.
f''
f'
y''
x''
d''
e''
b''
a''
c''
y'
x'
c'
d'
e'
b'
a'
Ep. 82
d''
c''
a''
b''
d'
c'
b'
a'
T1
Ep.83.
m''
f''
m'
f'
Ep.84.
a''
a'



Ep. 81



Ep. 85.



Ep. 86.

Ep. 87.

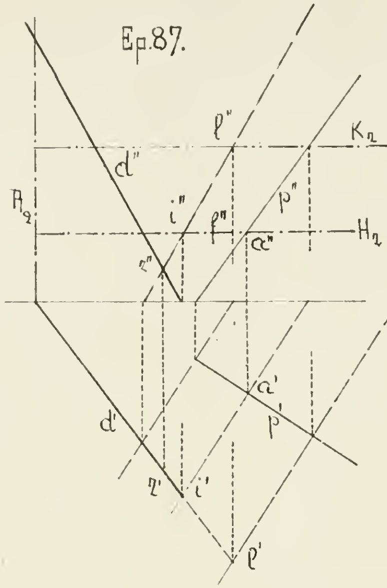
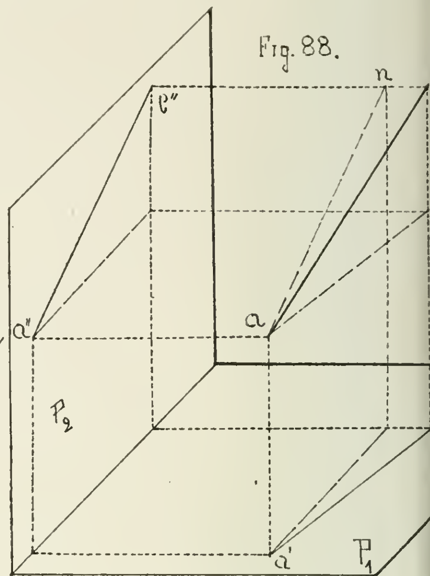
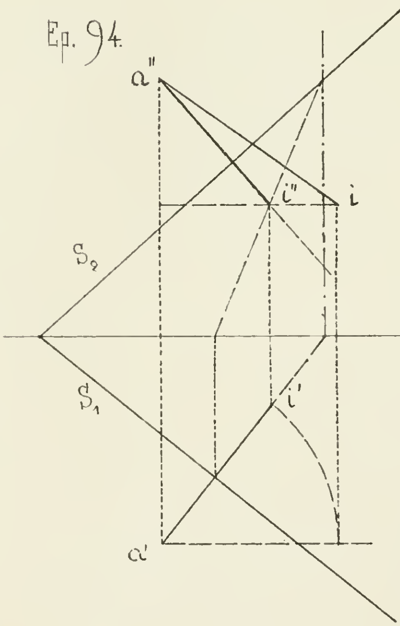


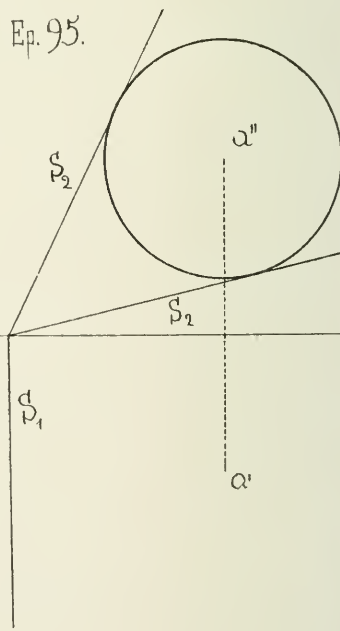
Fig. 88.



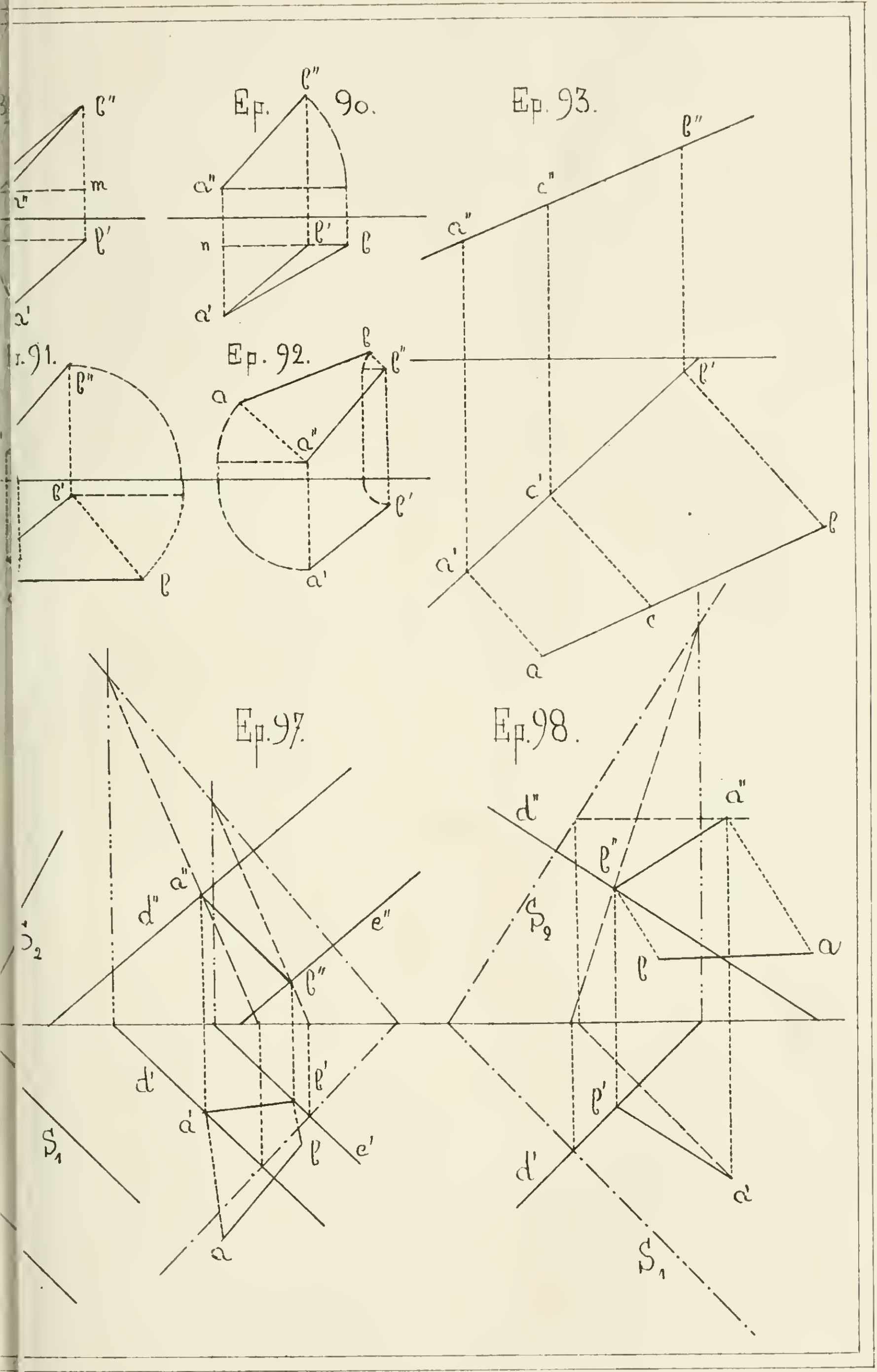
Ep. 94.

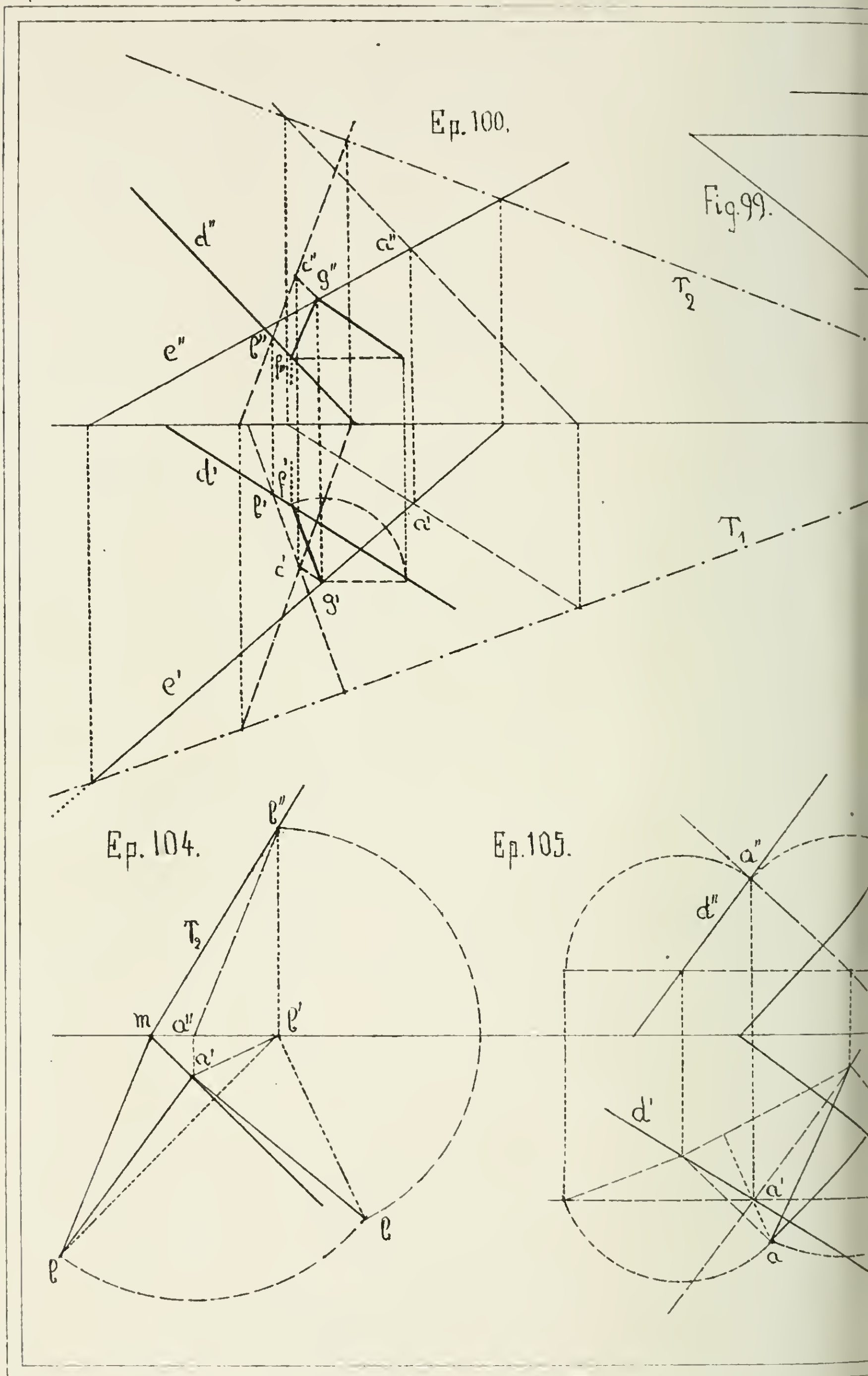


Ep. 95.



Ep. 9


Ep. 90.
Ep. 92.
Ep. 93.
Ep. 97.
Ep. 98.
a"
b"
c"
a'
b'
c'
a
b
c
d"
d'
e"
e'
m
n
S_1
S_2



Lith J.B. STEVENS

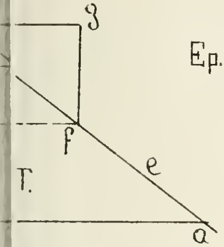


Fig. 101.

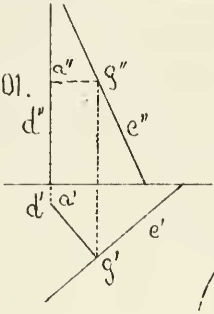
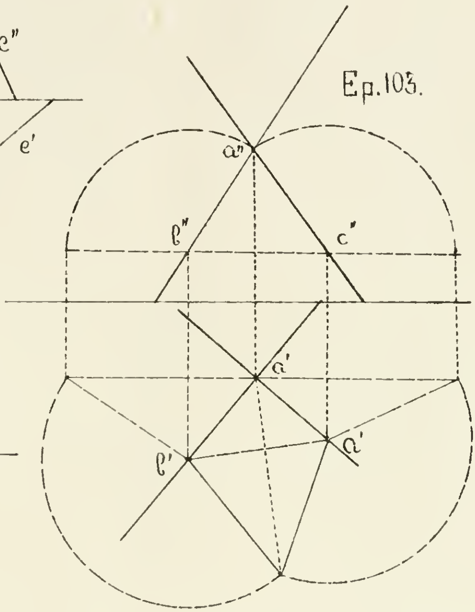


Fig. 103.



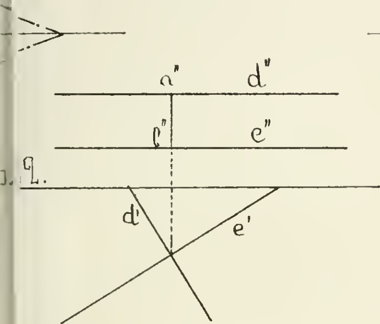


Fig. 106.

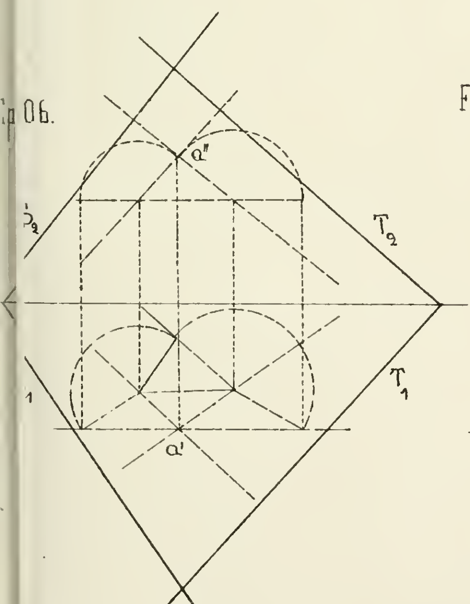


Fig. 107.

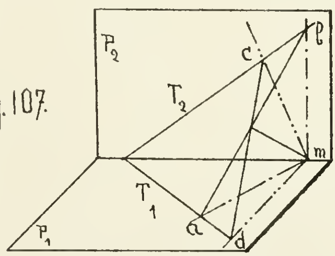
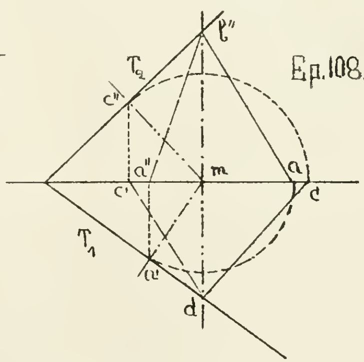
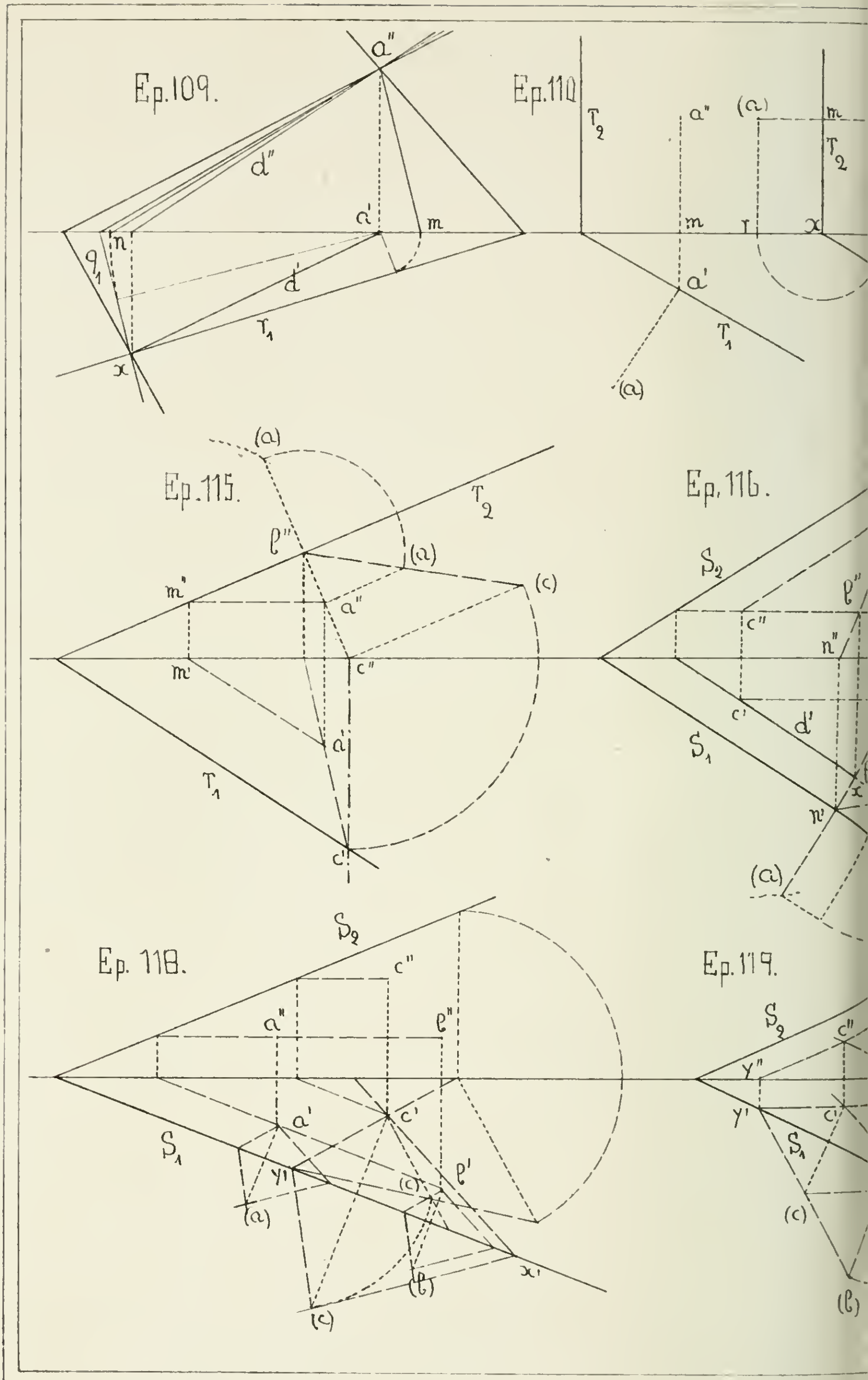
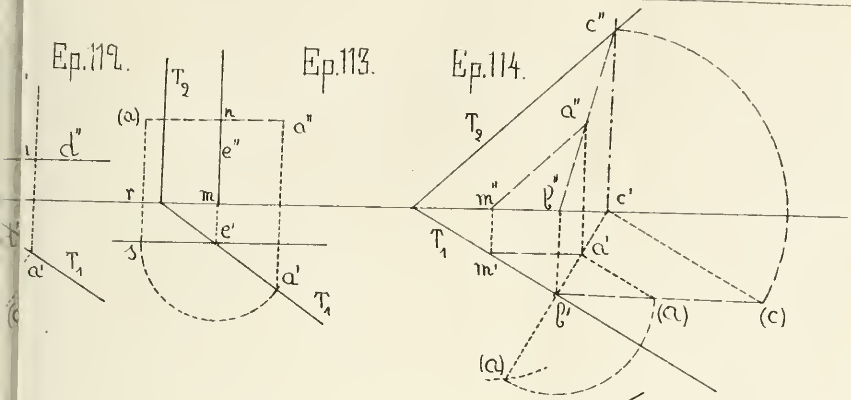


Fig. 108.

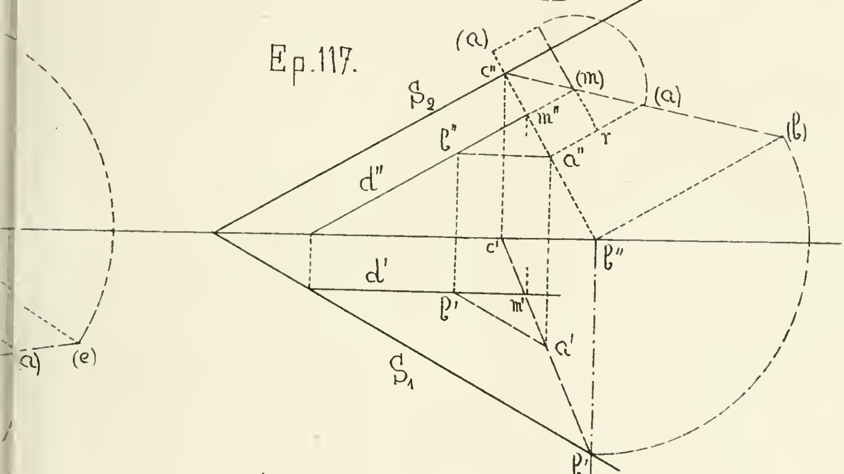



Ep.109.
Ep.110
Ep.115.
Ep.116.
Ep. 118.
Ep.119.

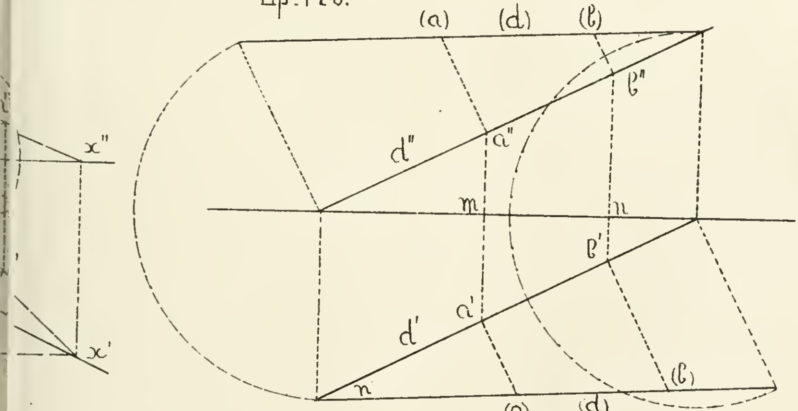
Ep.112. Ep.113. Ep.114.

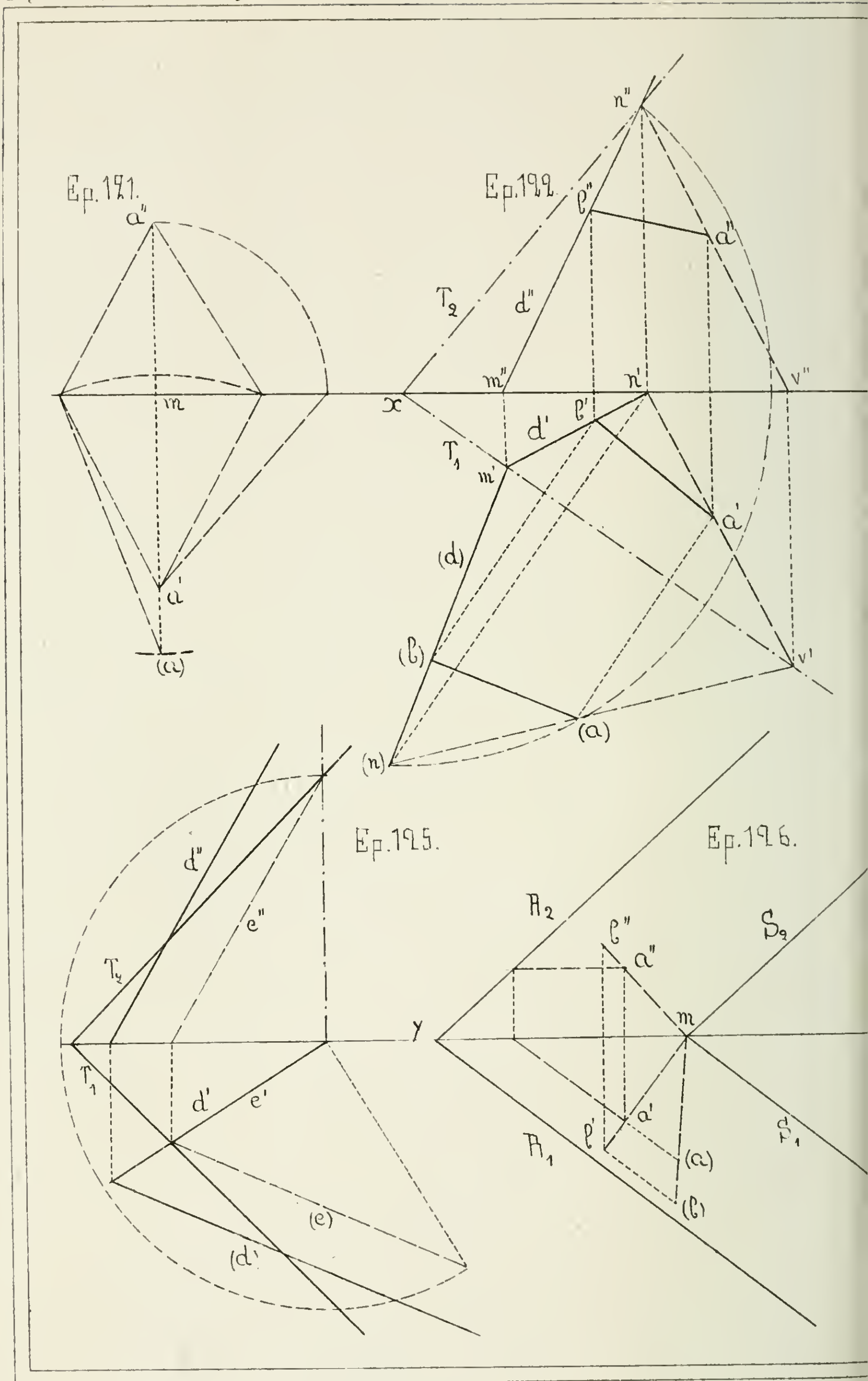


Ep.117.

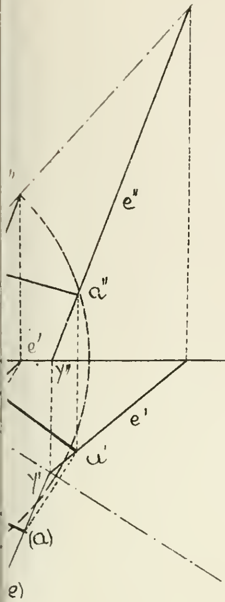


Ep.120.





Lith J B STEVENS. Bruxelles



Ep. 194.

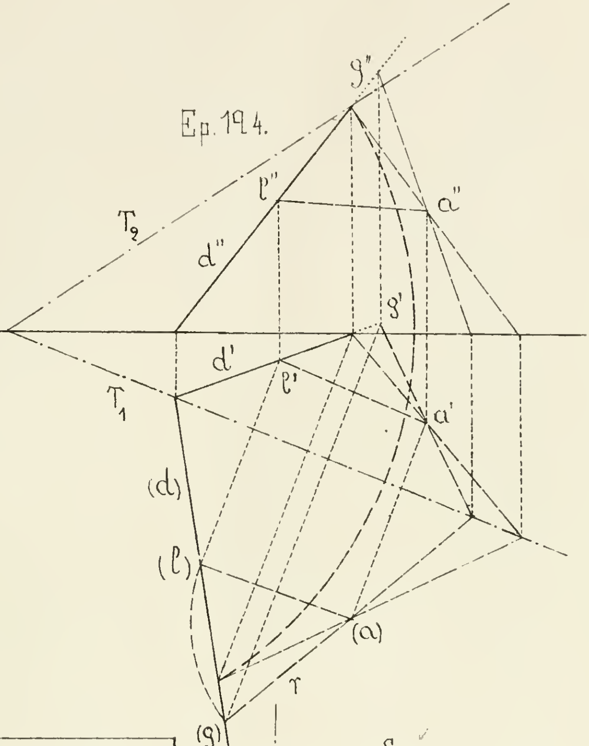
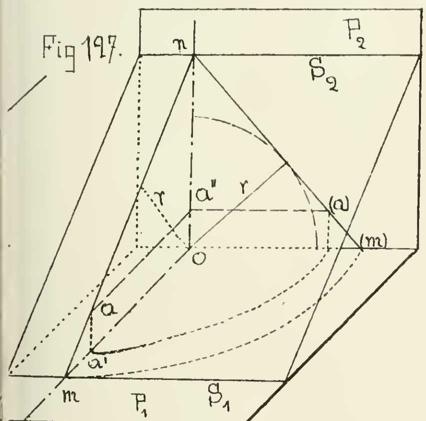
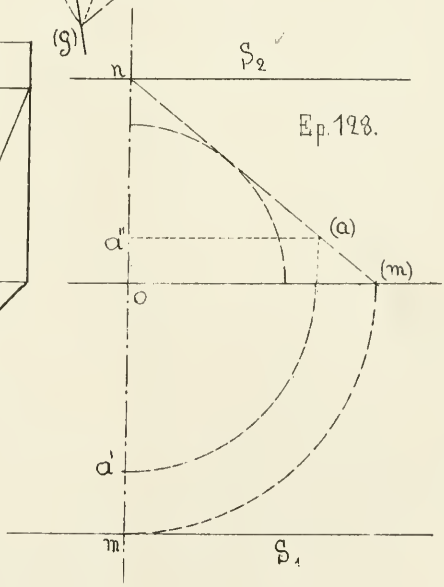


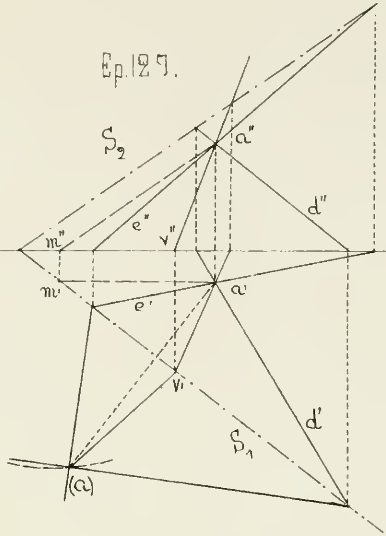
Fig 197.



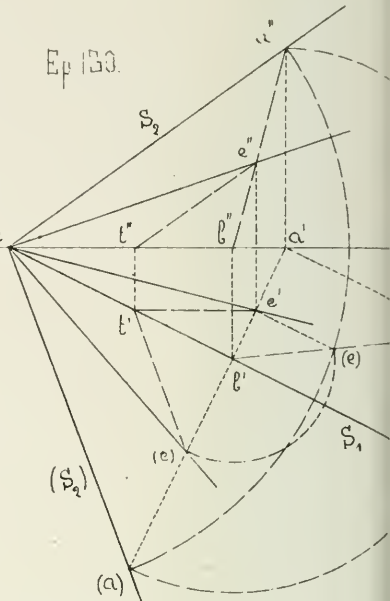
Ep. 198.



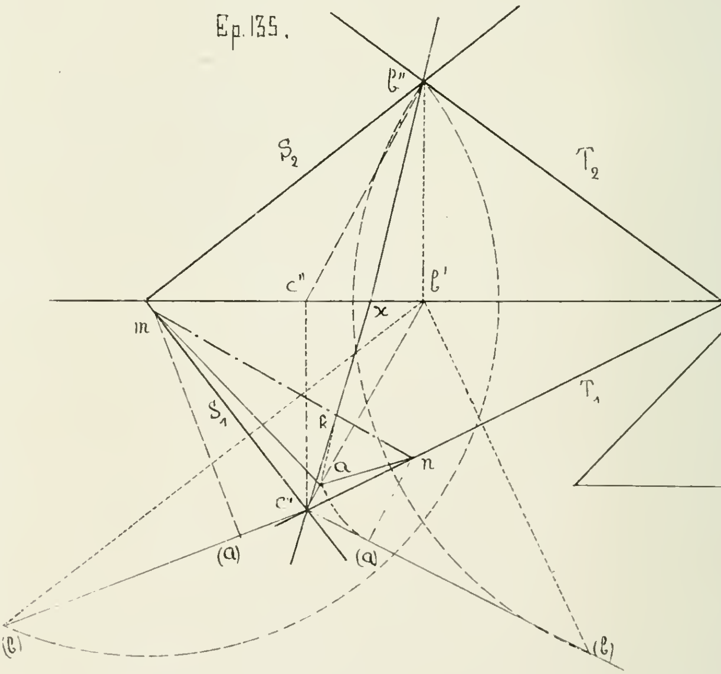
Ep. 127.

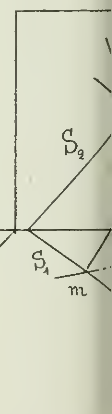


Ep. 133.



Ep. 135.





Lith. J.B. STEVENS Bruxelles

Ep. 131.

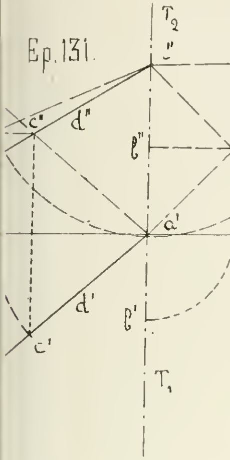
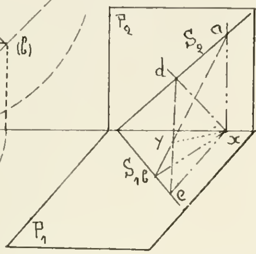
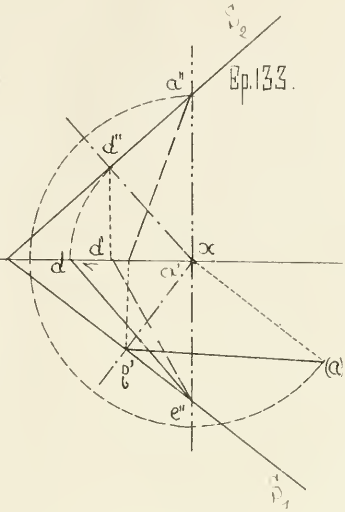


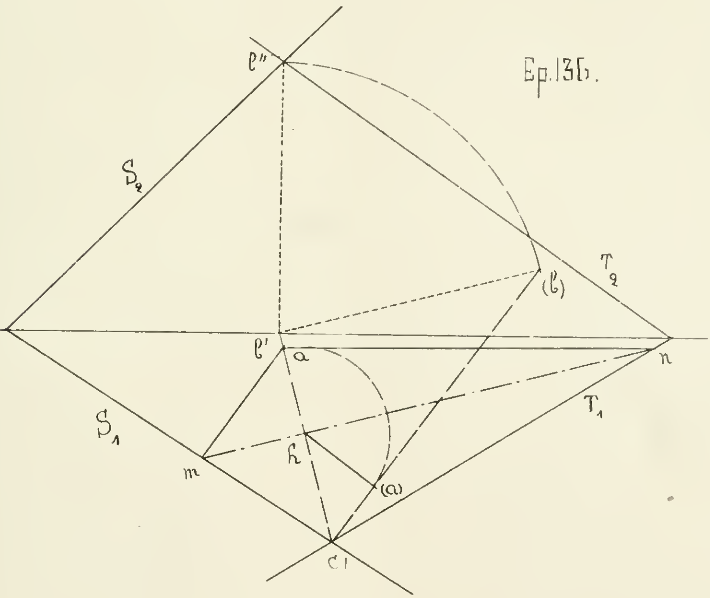
Fig. 132

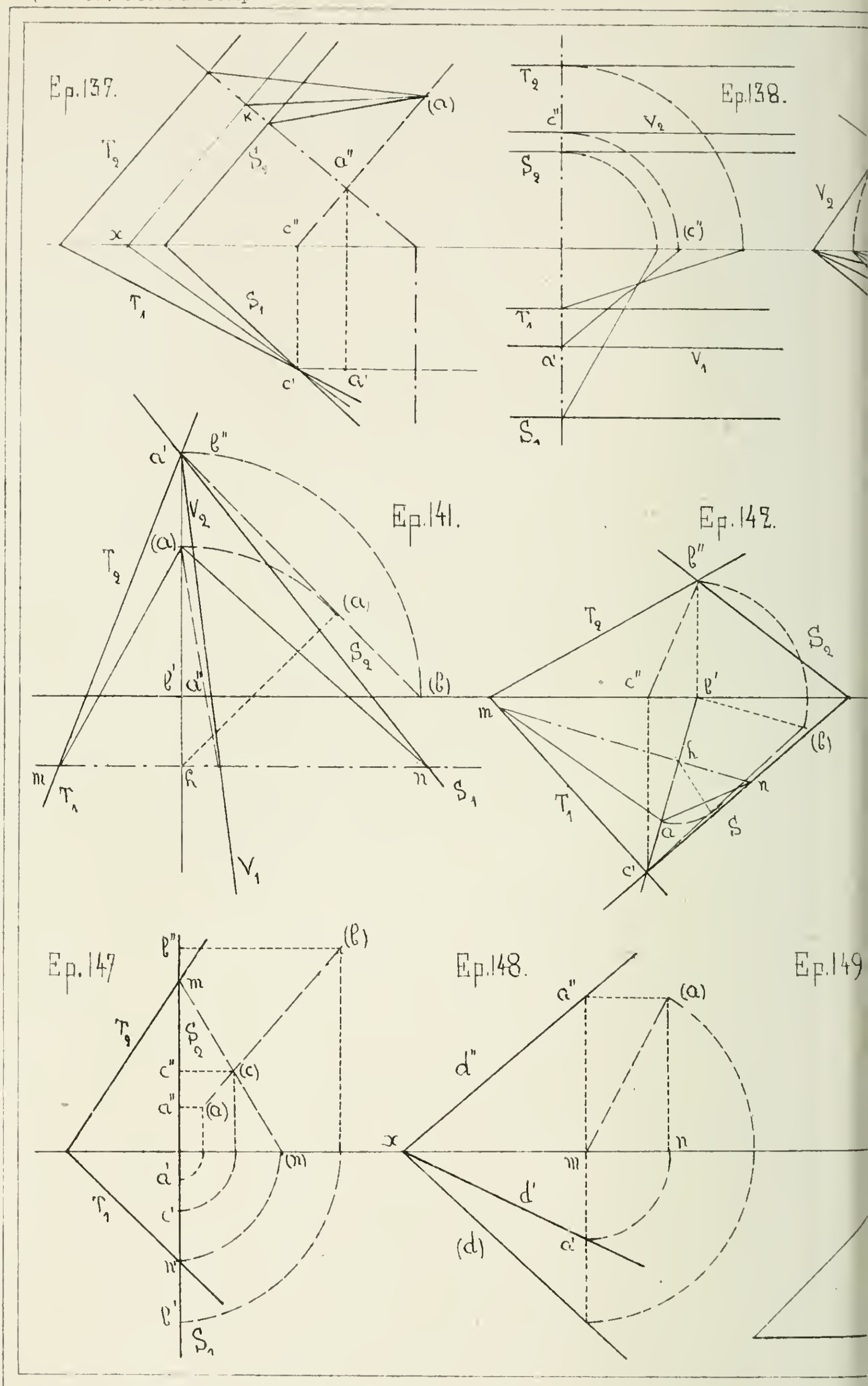


Ep. 133.

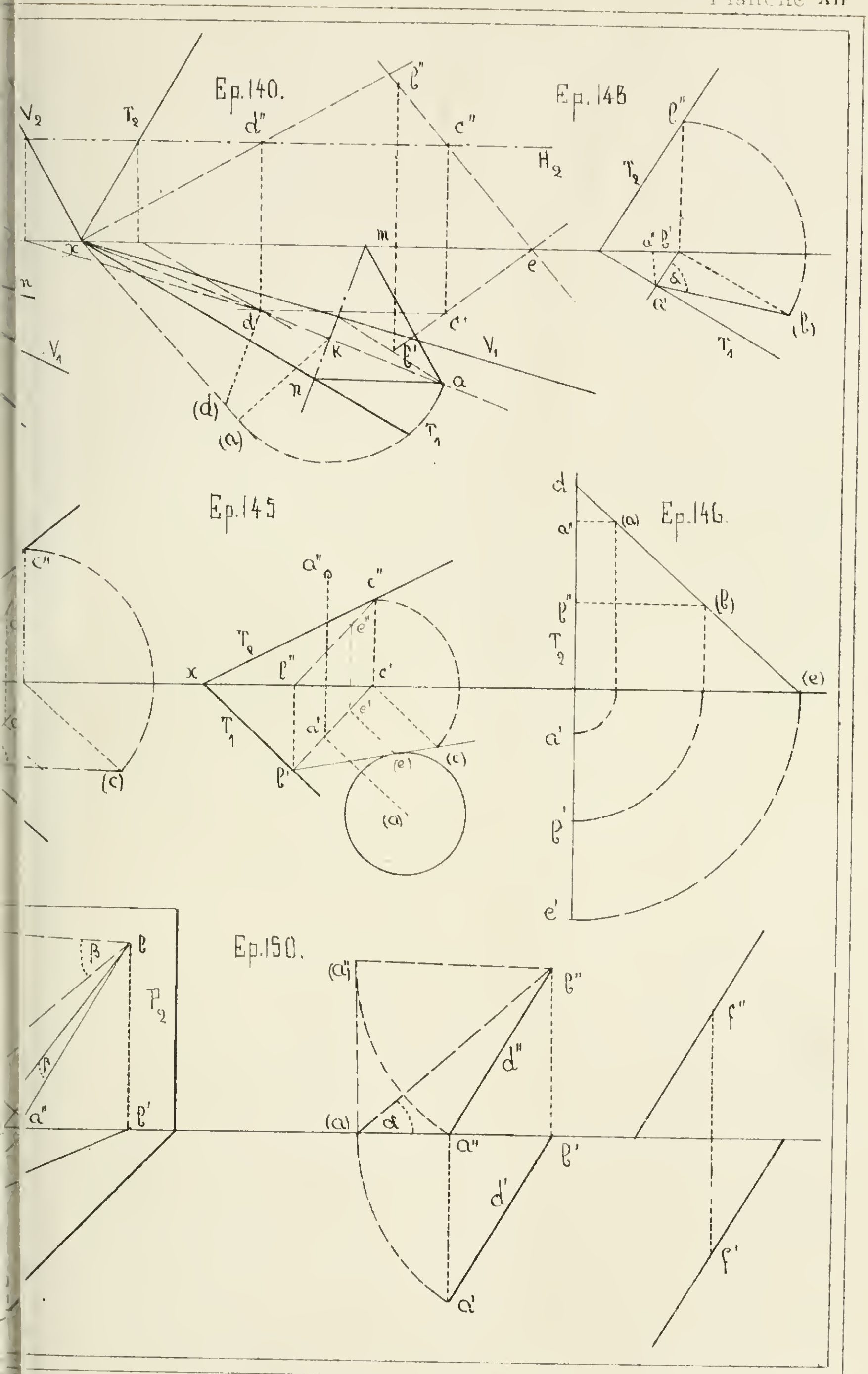


Ep. 136.



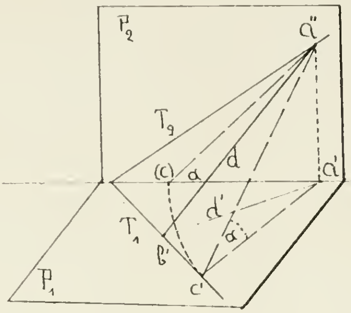


Lith. J. STEVENS Bruxelles



Ep. 140.
V₂
T₂
d"
b"
c"
H₂
x
m
e
d'
c'
K
b'
V₁
n
a
(d)
(a)
T₁
V₁
Ep. 148
b"
T₂
a' b'
α
a'
(b)
T₁
Ep. 145
c"
a"
c"
T₂
x
b"
e"
c'
T₁
a'
e'
b'
(e)
(c)
(a)
(c)
Ep. 146.
d
a"
(a)
b"
(b)
T₂
(e)
a'
b'
e'
Ep. 150.
b
β
P₂
β
a"
b'
(a')
b"
d"
(a)
α
a"
b'
d'
a'
f"
f'

Fig. 151.



Ep. 152.

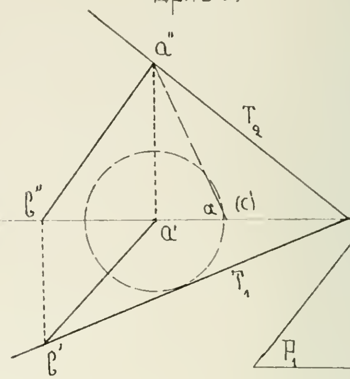
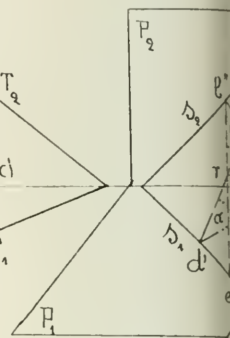
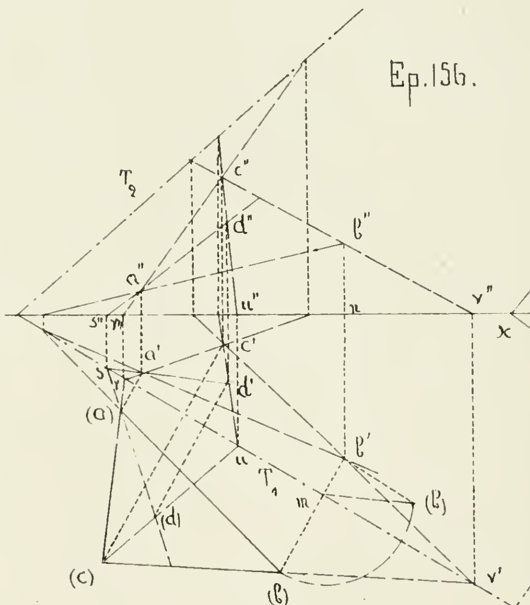
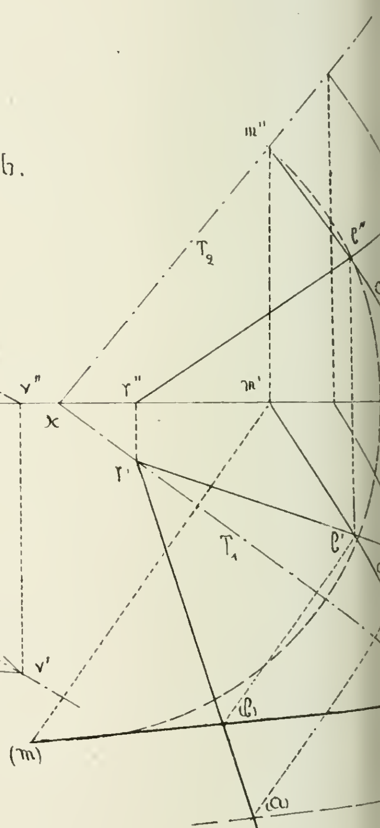


Fig. 15

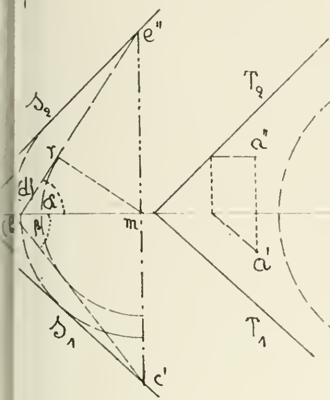


Ep. 156.

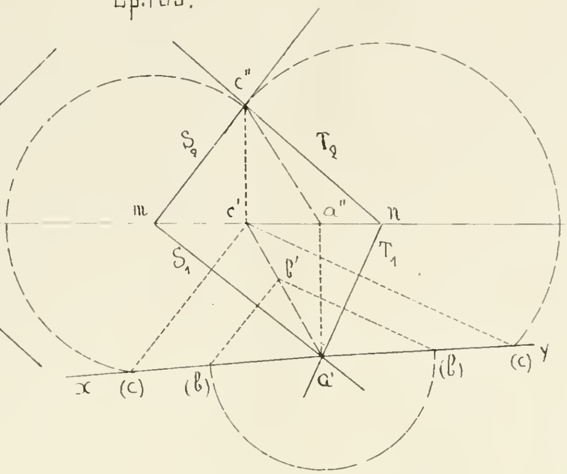




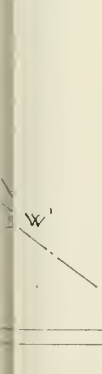
Ep.154.



Ep.155.



Ep.157.



Ep.158.

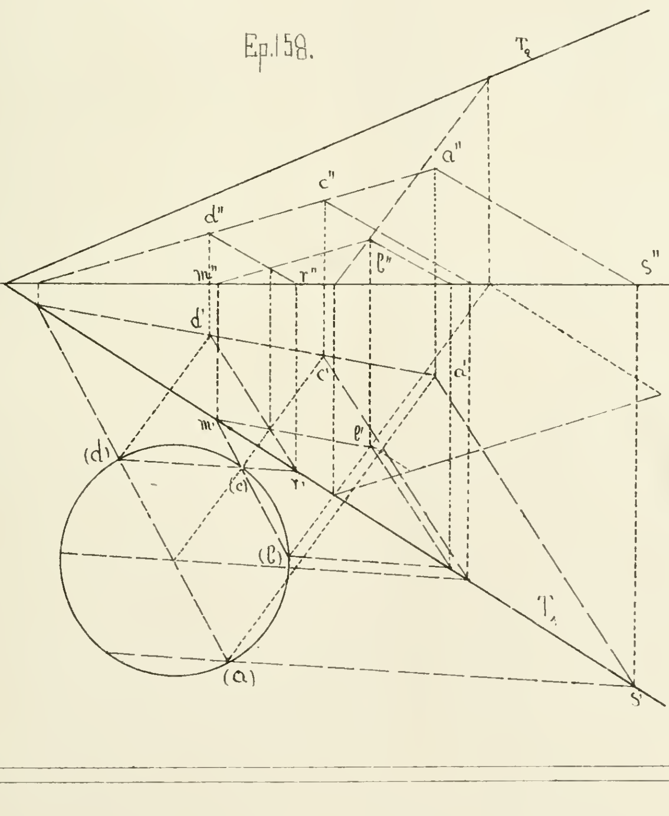


Fig. 159.

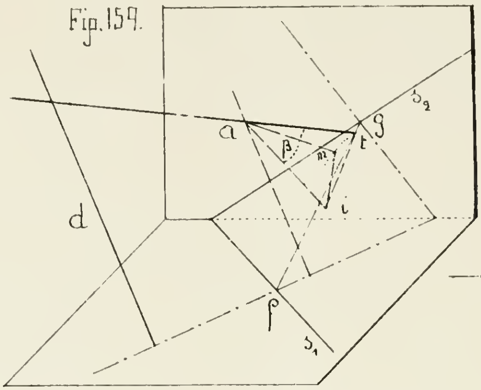


Fig. 160.

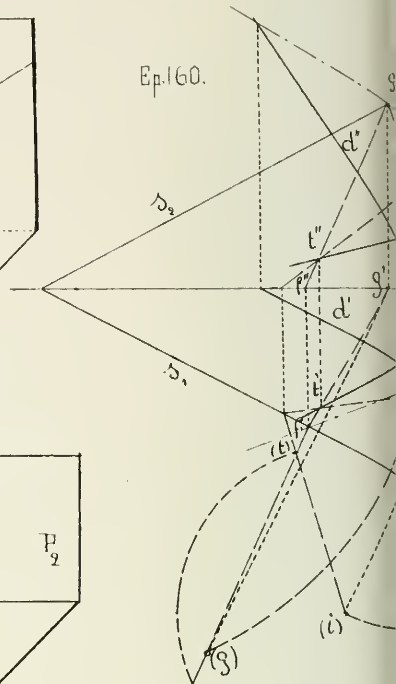


Fig. 163.

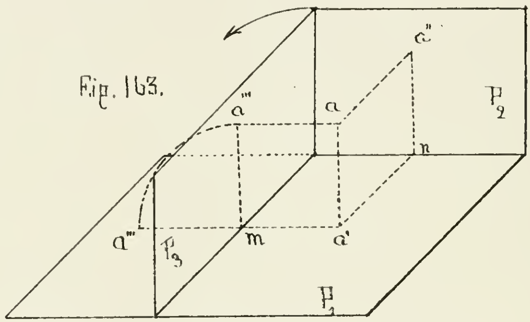


Fig. 164.

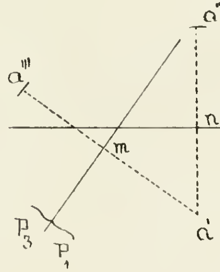


Fig. 167.

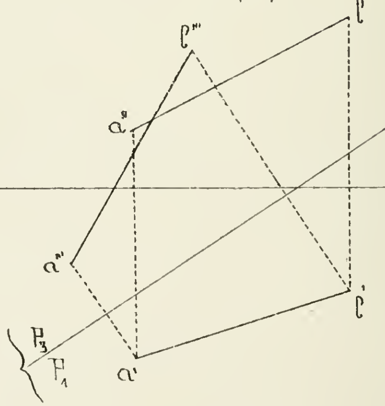


Fig. 168.

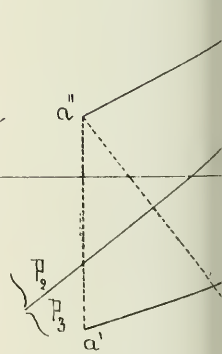


Fig. 161.

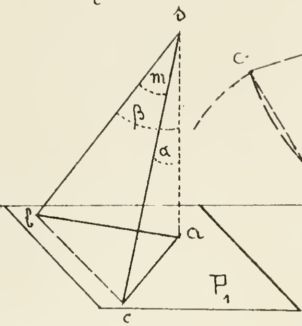
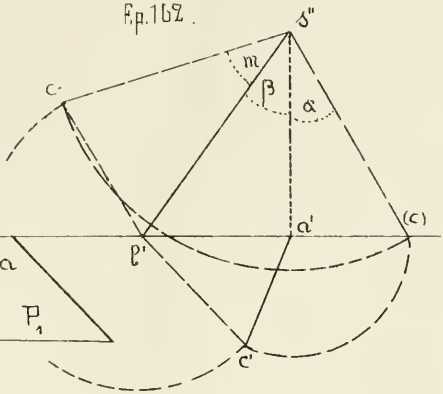


Fig. 162.



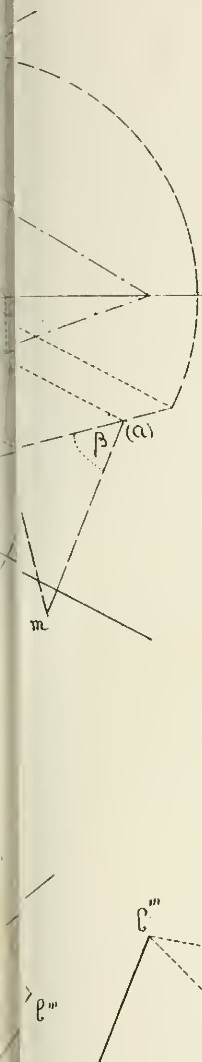


Fig. 165.

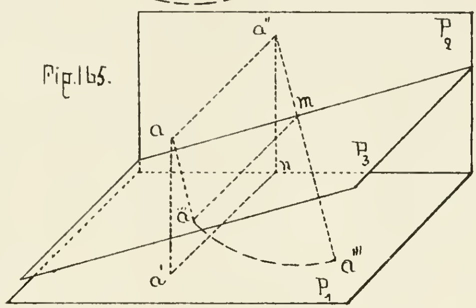


Fig. 169.

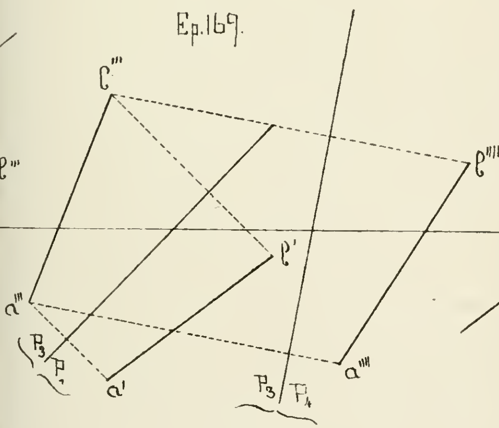
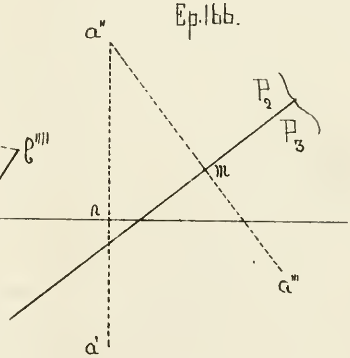
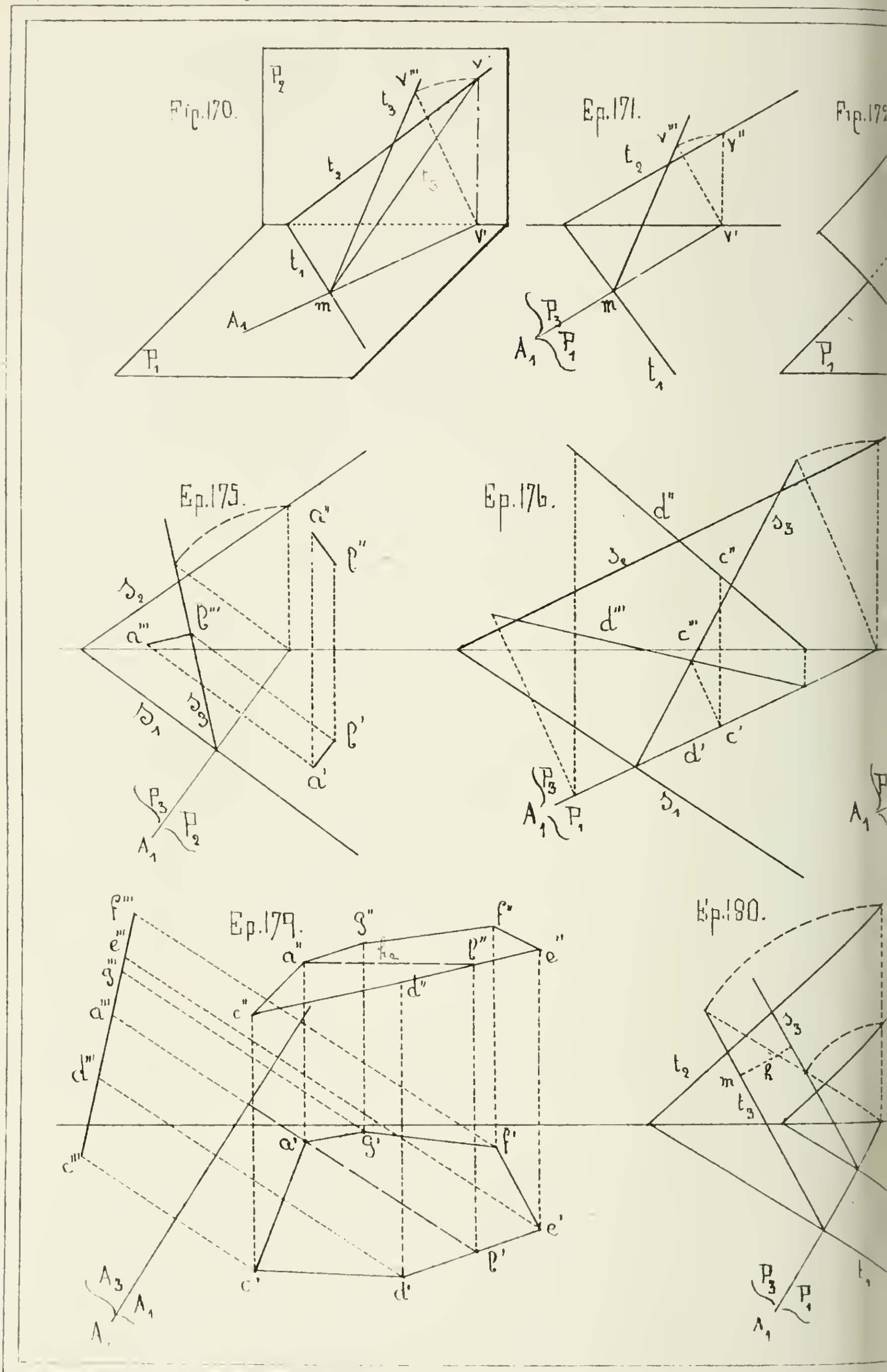
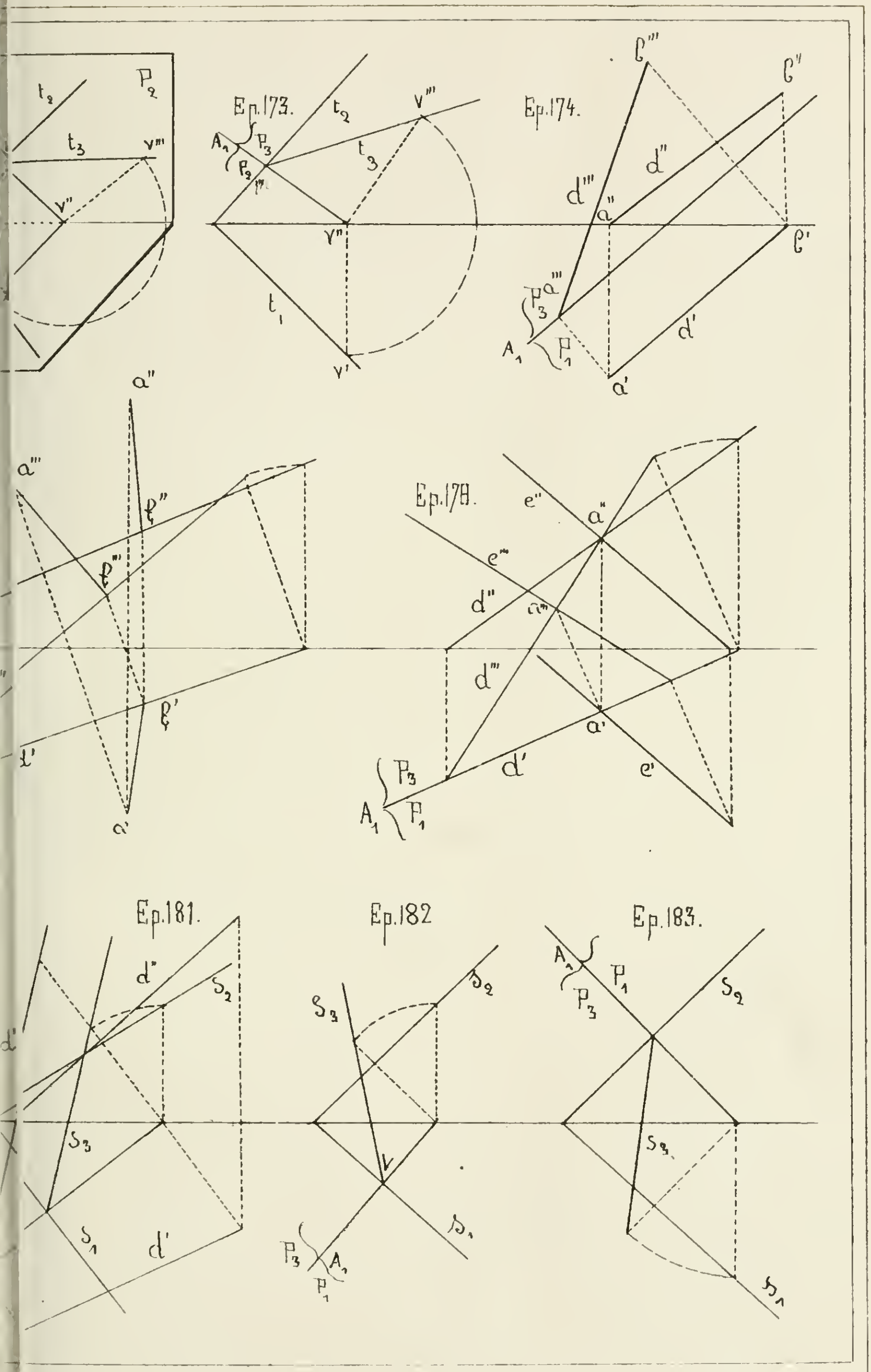


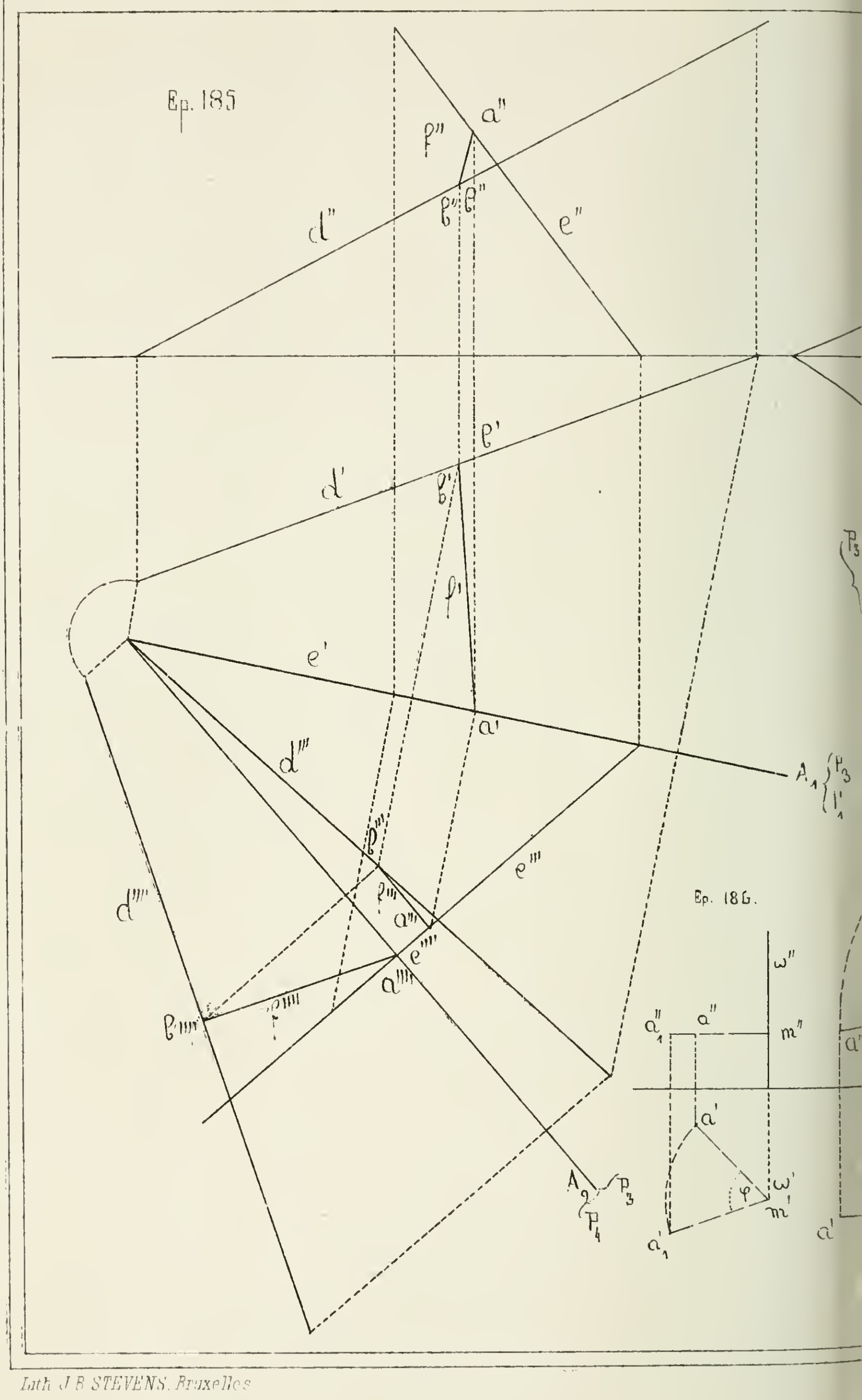
Fig. 166.





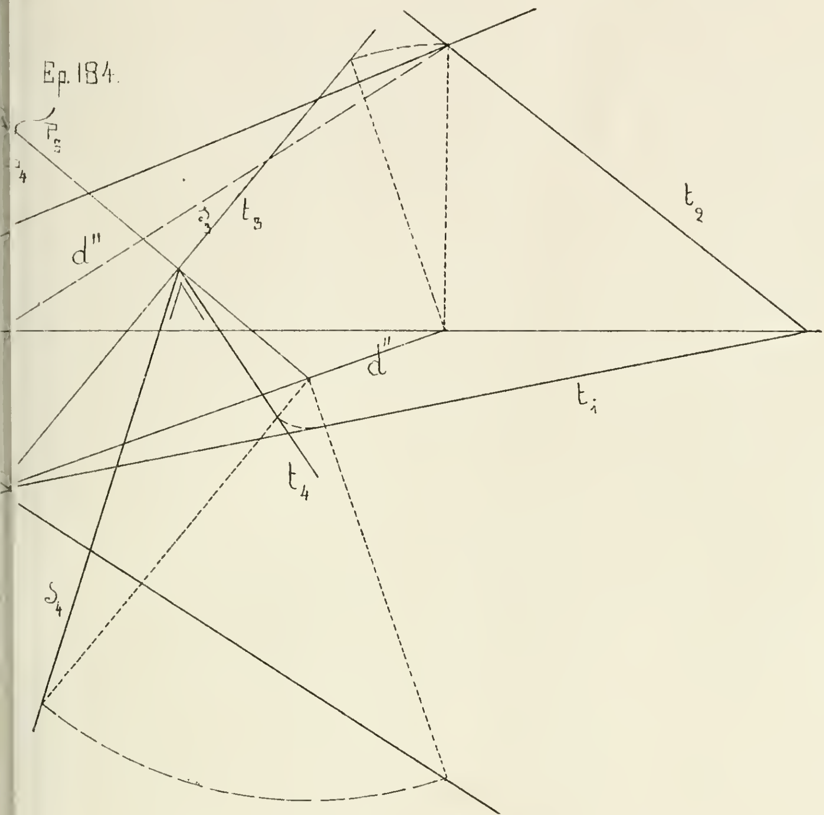
Lith. ... STEVENS Bruxelles.


Ep.173.
Ep.174.
Ep.178.
Ep.181.
Ep.182
Ep.183.



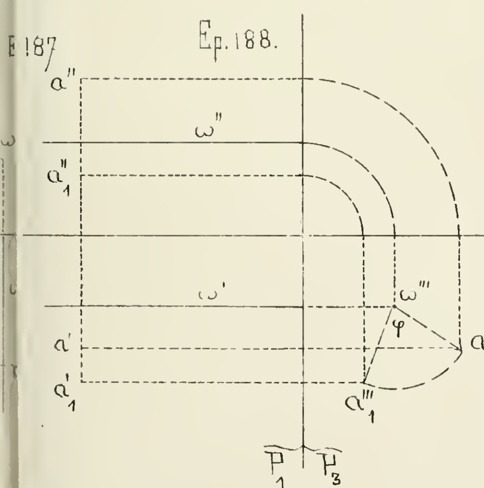
Lith. J.B. STEVENS, Bruxelles

Ep. 184.

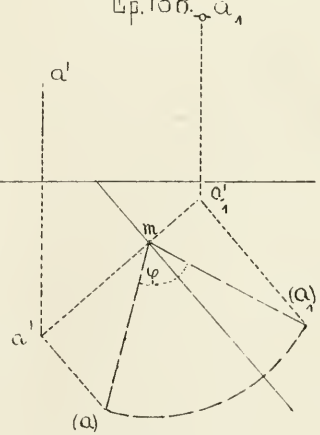


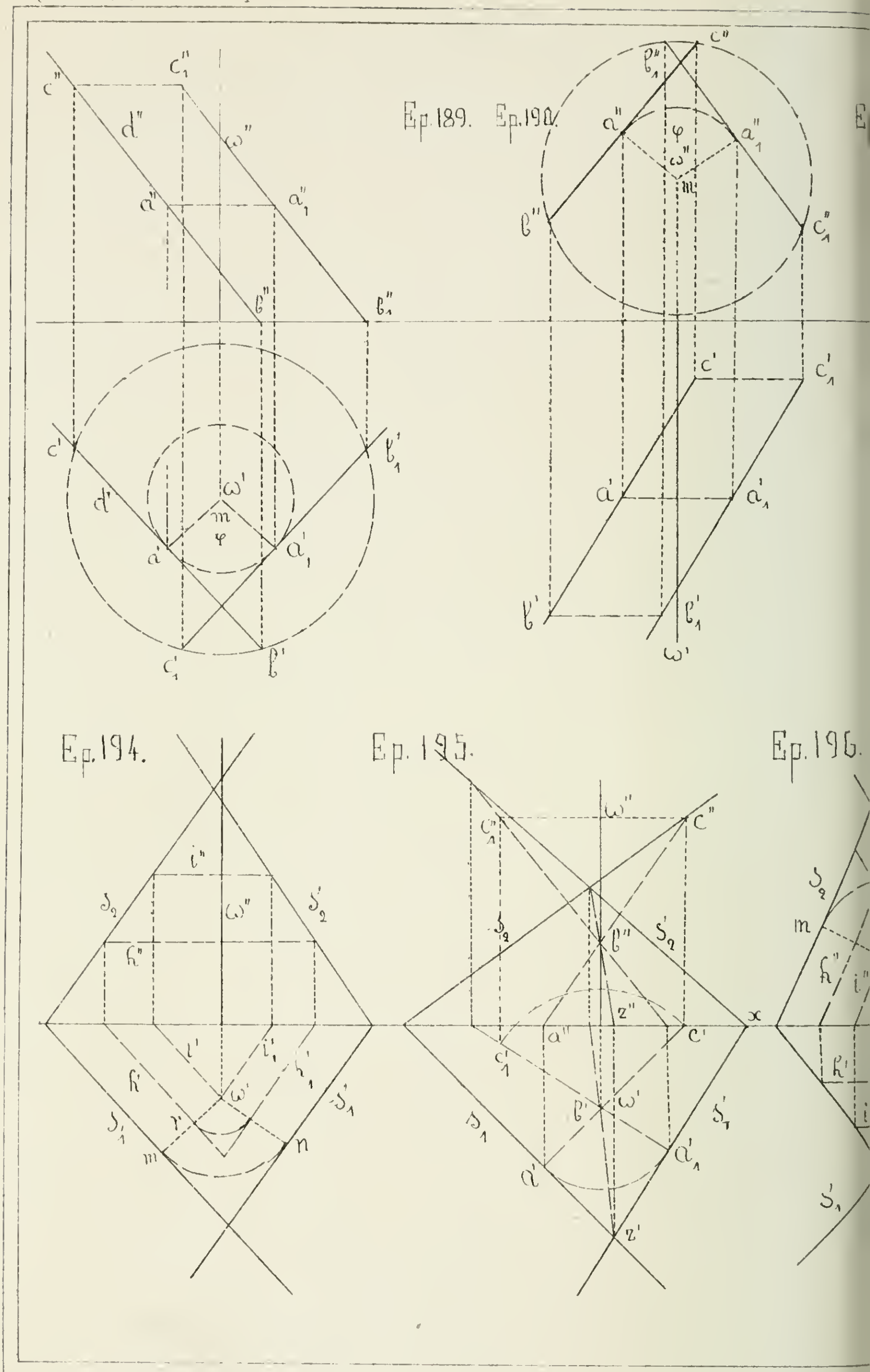
E 187

Ep. 188.

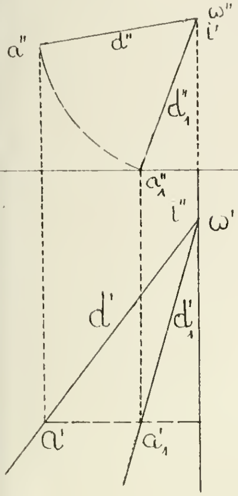


Ep. 188 bis

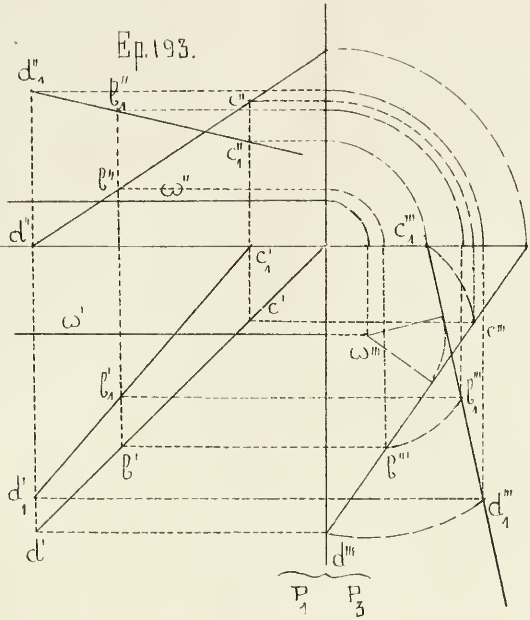



Ep.189.
Ep.190.
Ep.194.
Ep.195.
Ep.196.

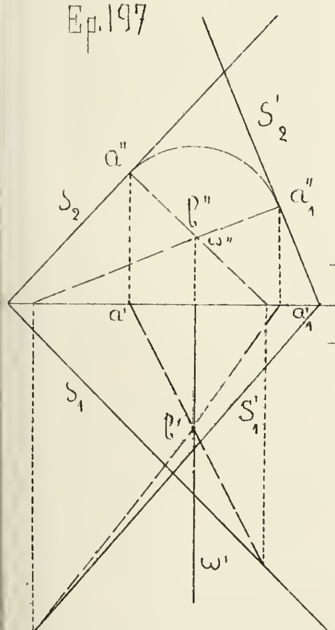
Ep. 192.



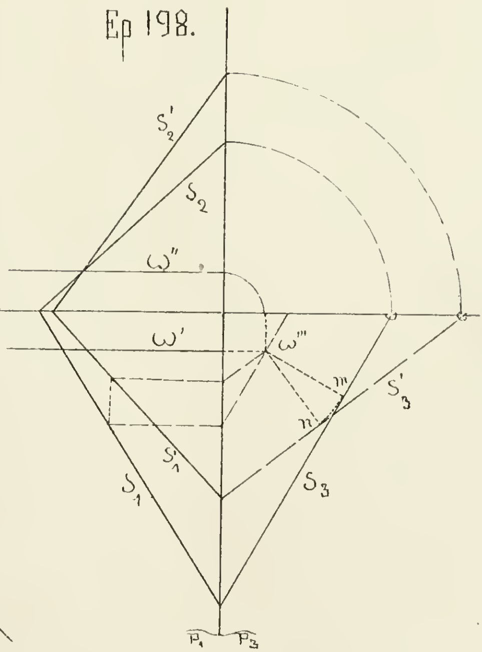
Ep. 193.

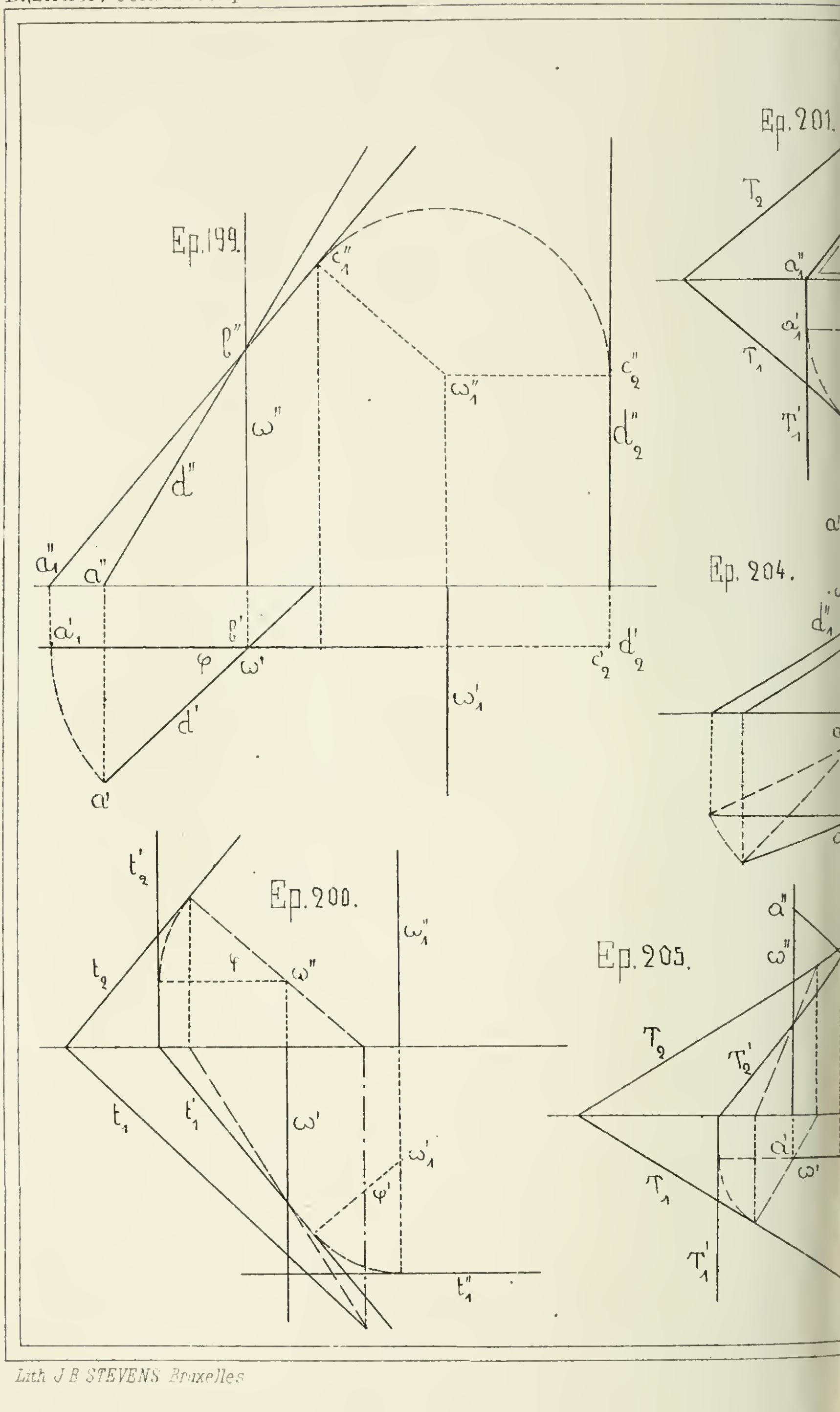


Ep. 197



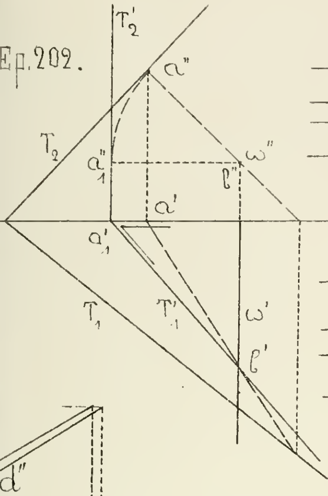
Ep. 198.



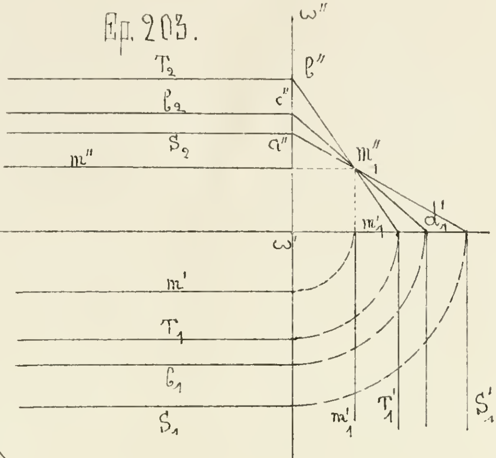


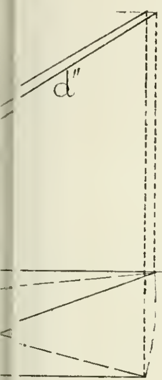
Lith J B STEVENS Bruxelles

Ep. 202.

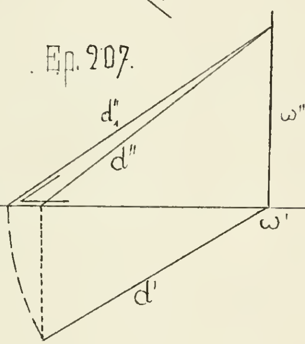


Ep. 203.

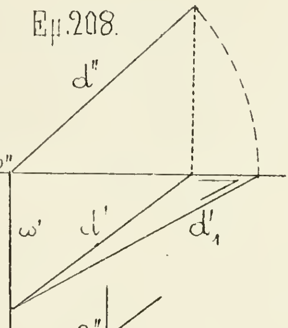




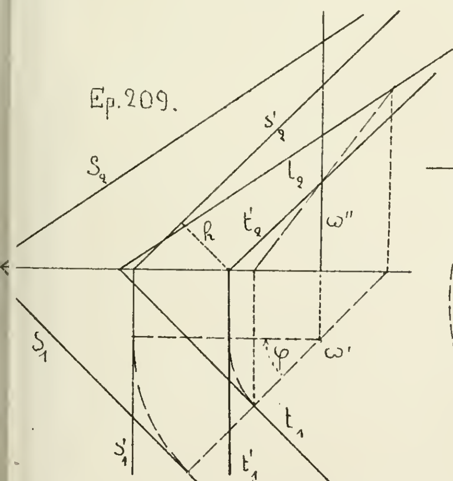
Ep. 207.



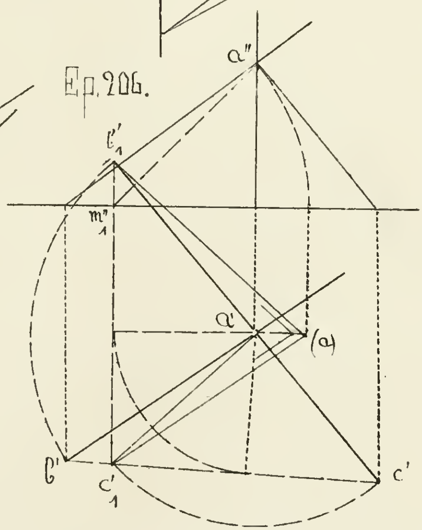
Ep. 208.



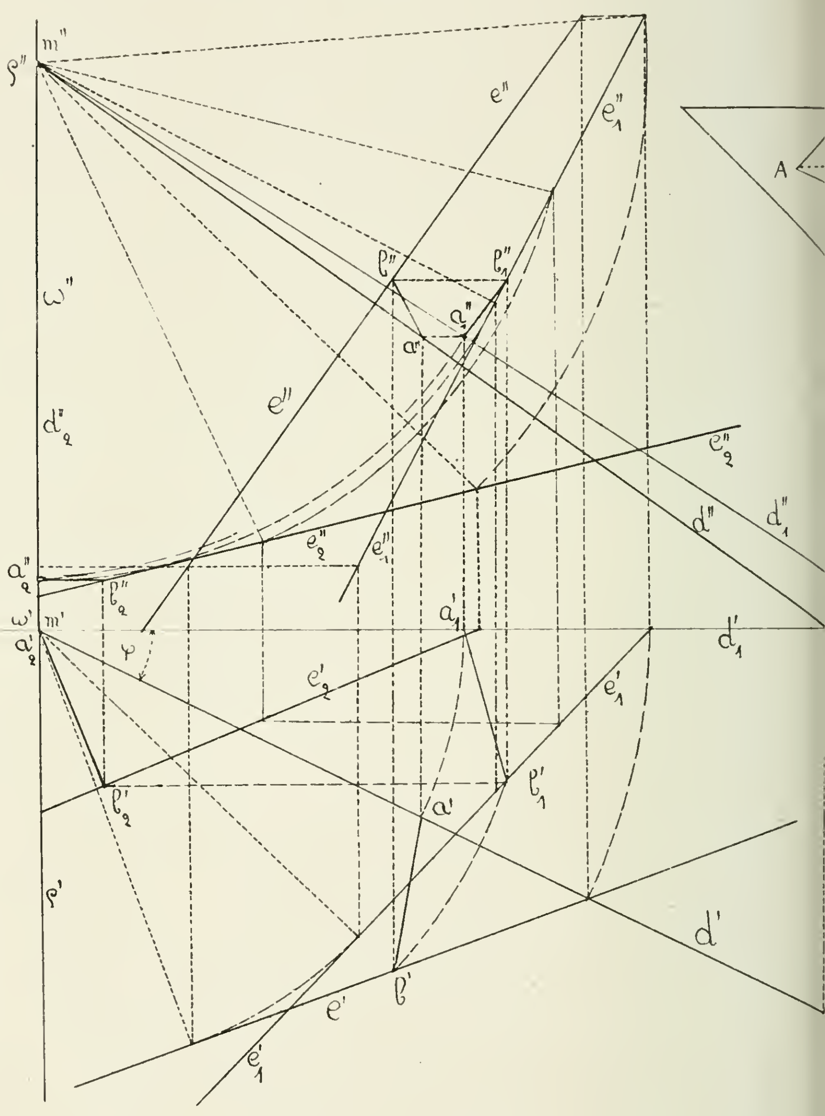
Ep. 209.



Ep. 206.

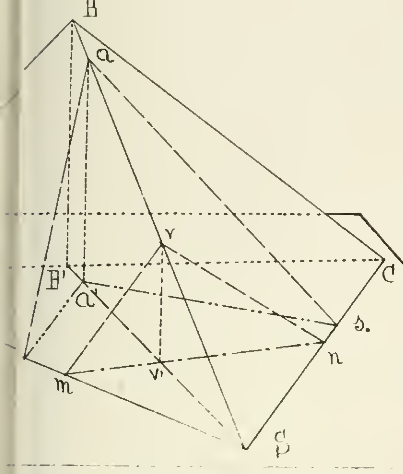


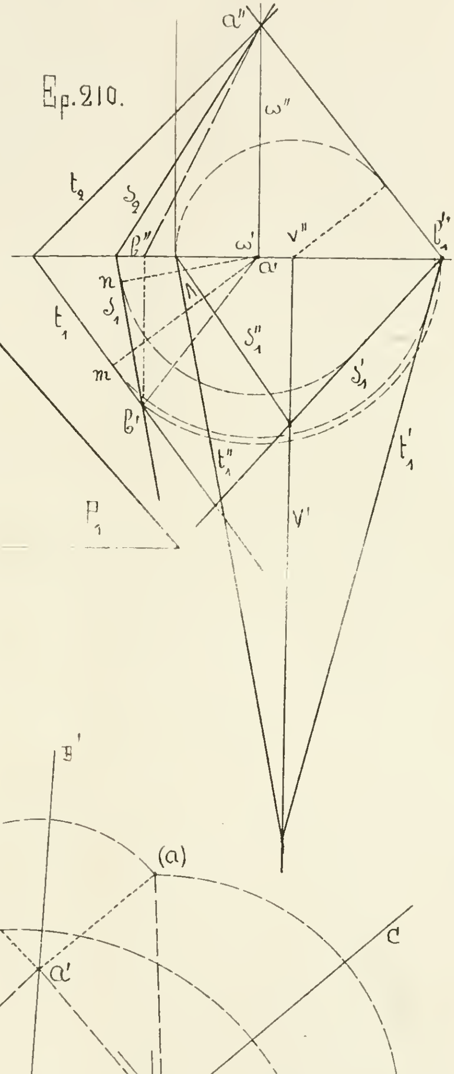
Ep. 211.



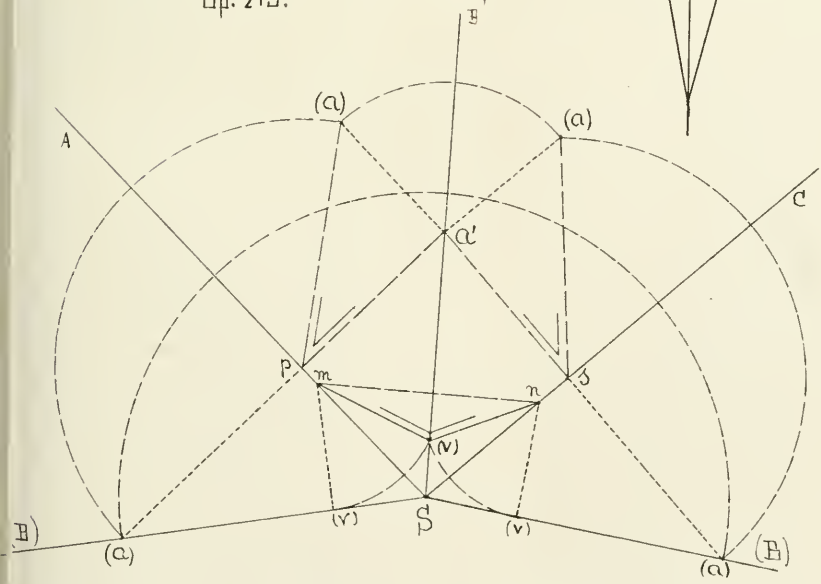
Lith J.P. STEVENS Bruxelles

Ep. 210.


B
a
B'
a'
v
v'
C
s.
n
m
S


a''
ω''
t₂
s₂
b''
ω'
v''
b'₁
a'
n
s₁
t₁
s''₁
m
b'
s'₁
t''₁
t'₁
V'
P₁

Ep. 213.


B'
(a)
(a)
A
C
a'
p
m
n
s
(v)
(v)
S
(v)
B)
(a)
(a)
(B)

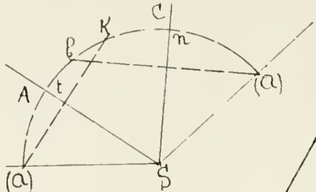


Fig. 214.

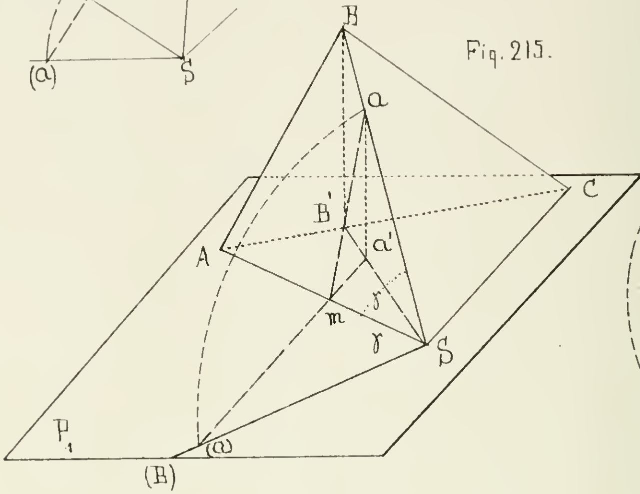


Fig. 215.

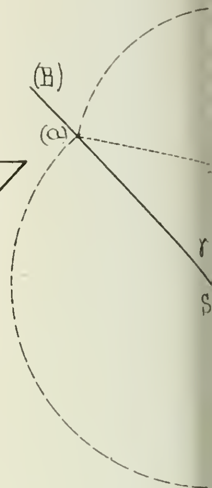
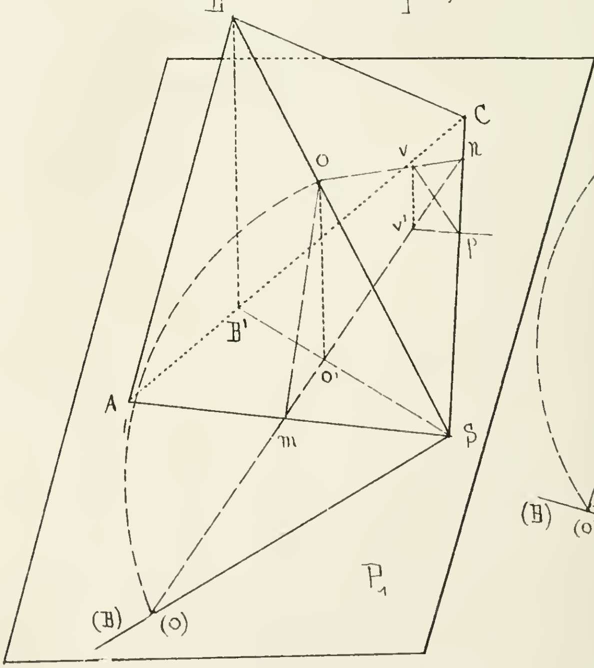
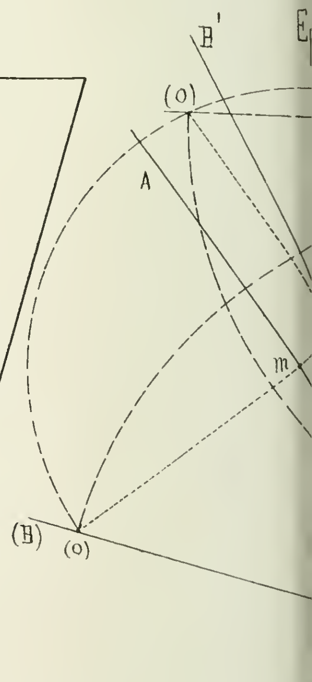
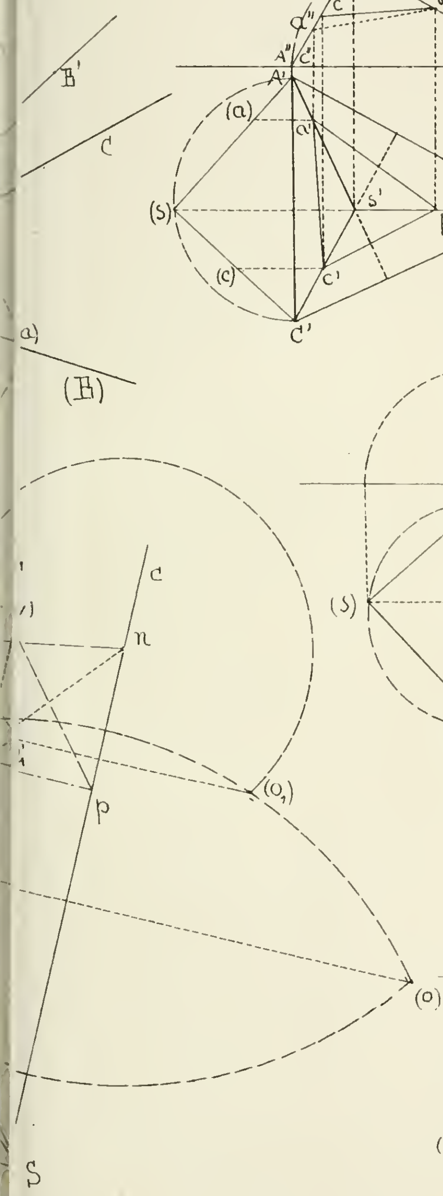


Fig. 217.

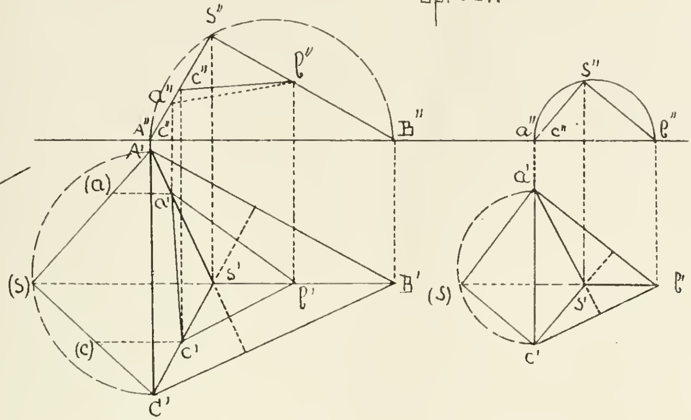




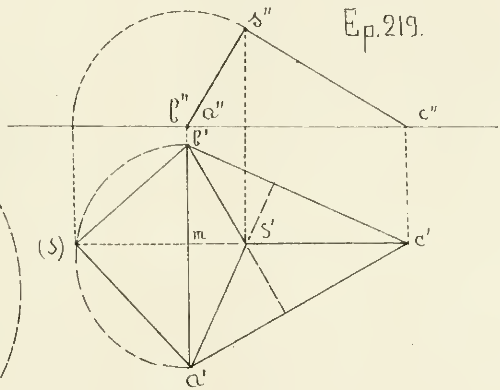
E 216.



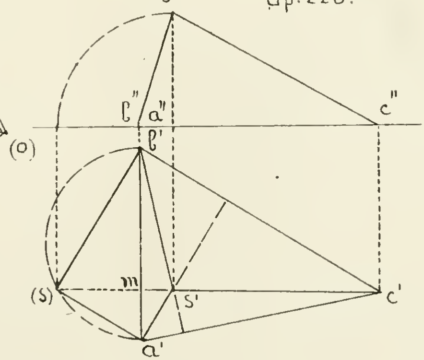
Ep. 221.

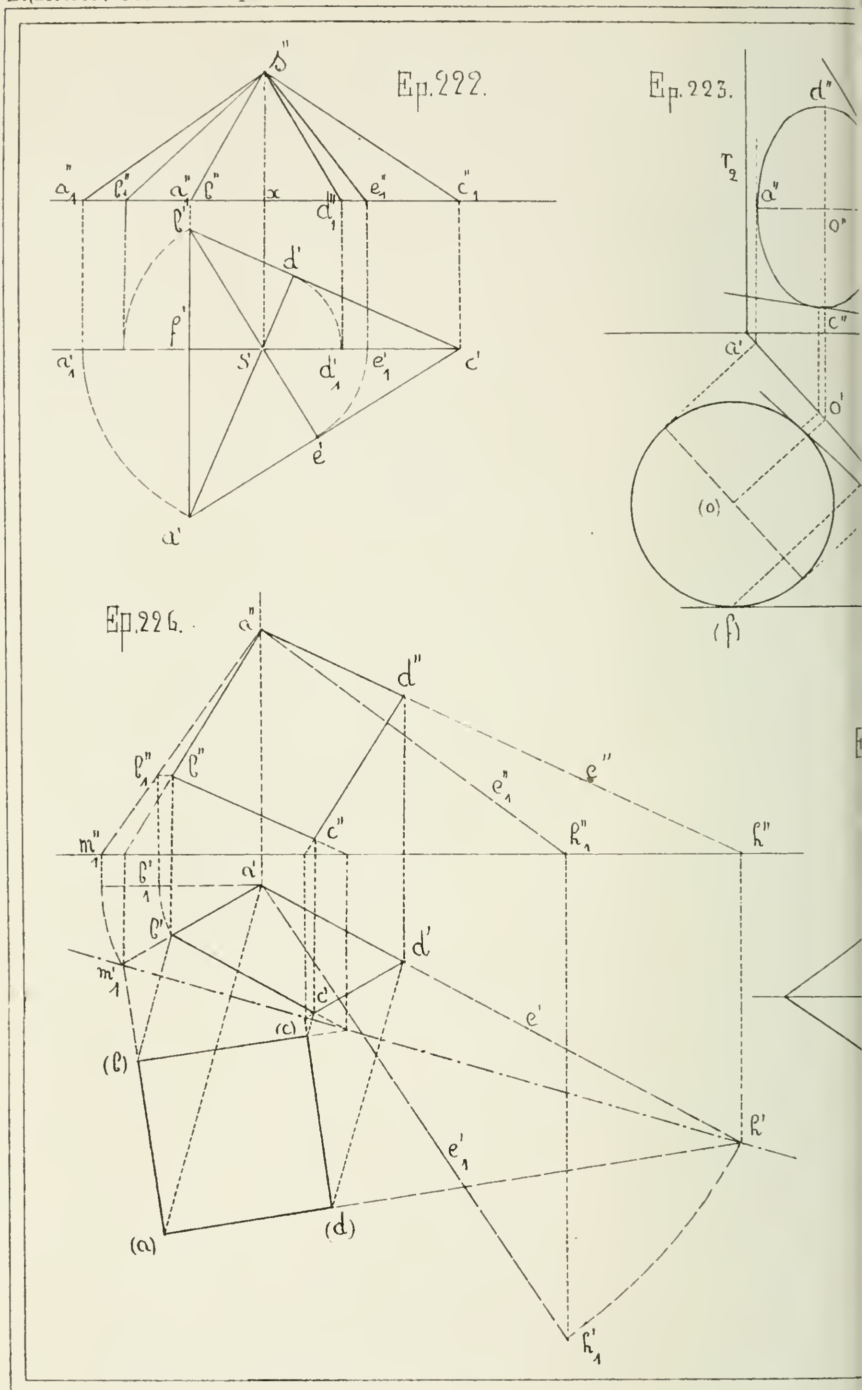


Ep. 219.



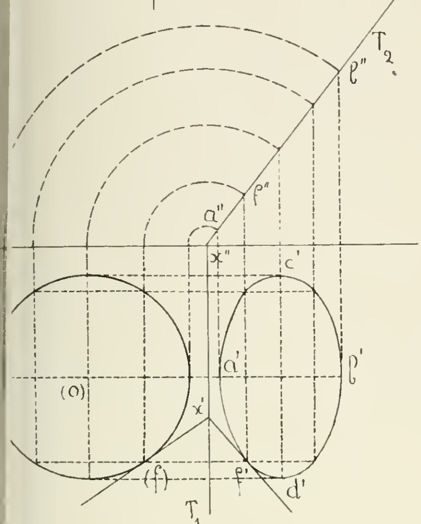
Ep. 220.



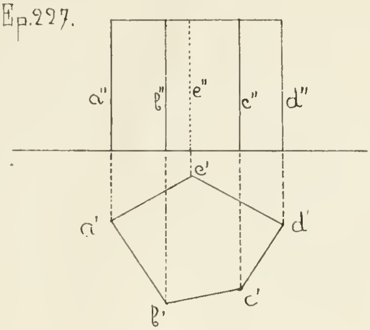


Lith J B STEVENS Bruxelles

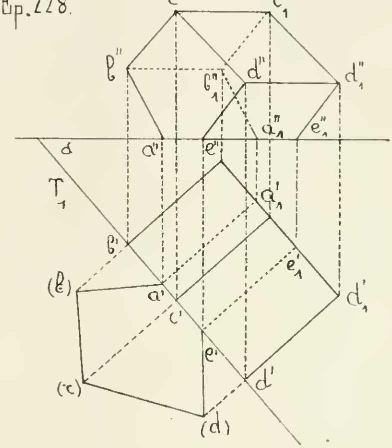
Ep. 224.

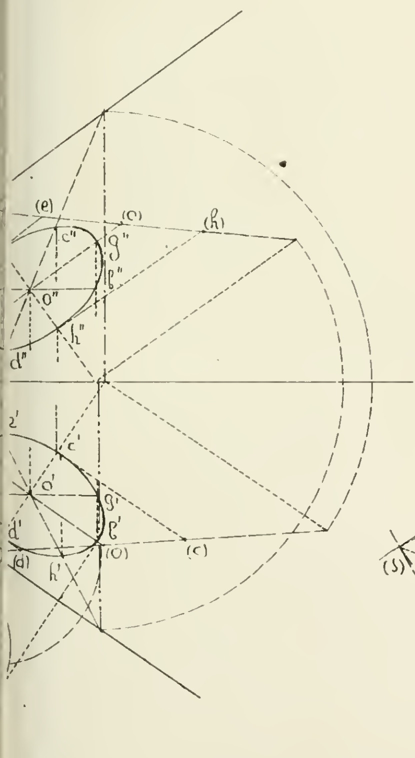


Ep. 227.

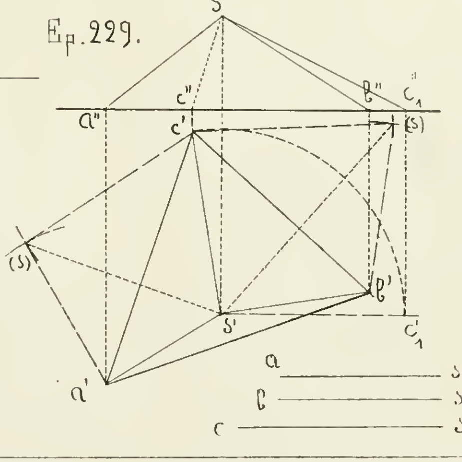


Ep. 228.

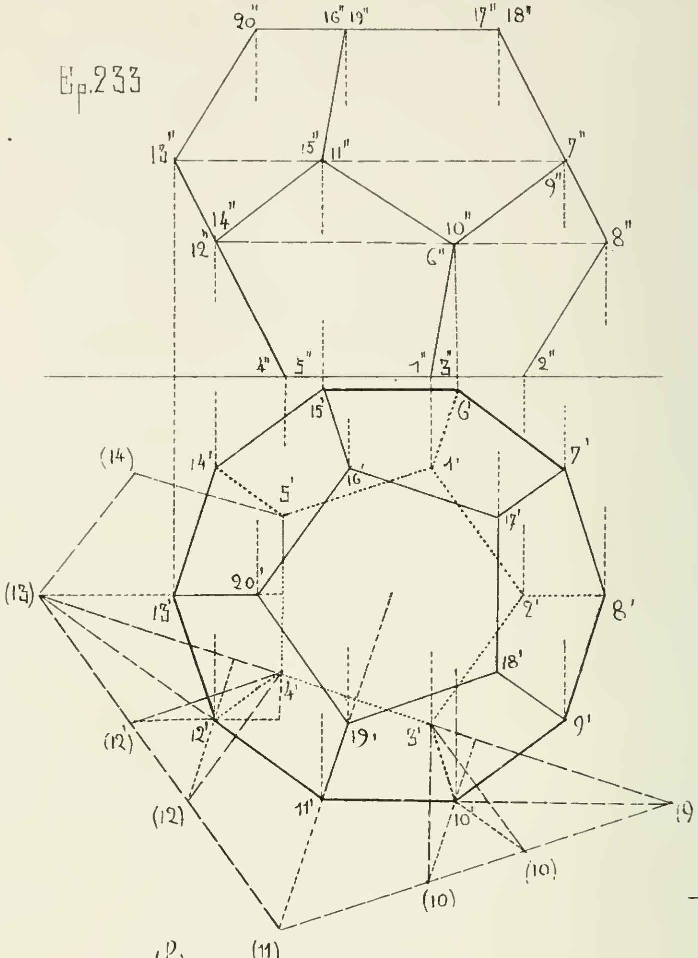




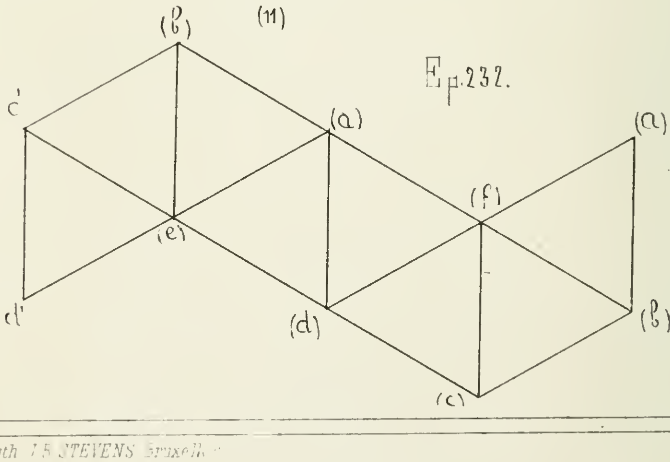
Ep. 229.

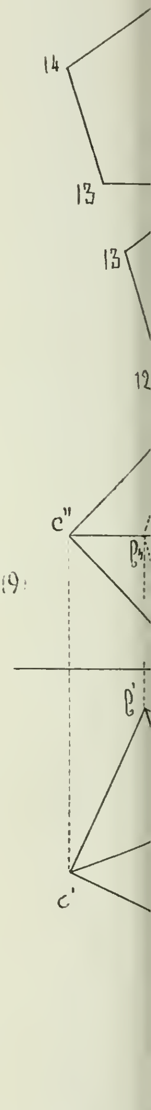


Ep.233

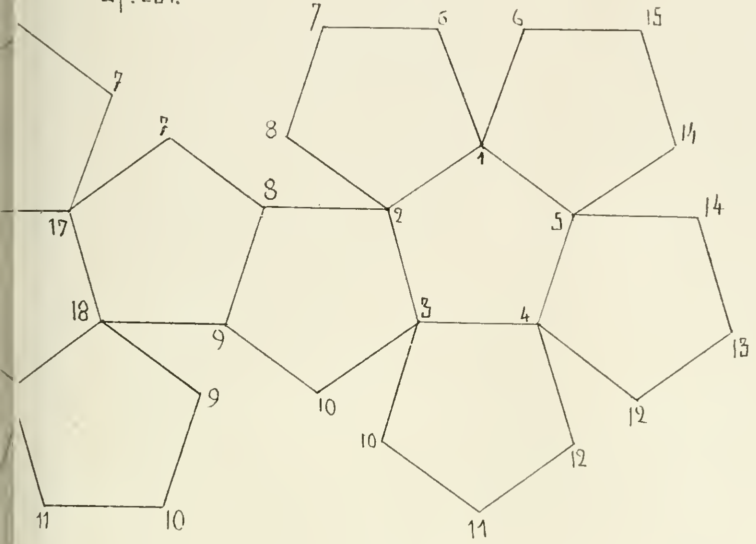

20"
16" 19"
17" 18"
13"
15" 11"
7"
9"
14"
12"
10"
6"
8"
4"
5"
1"
3"
2"
15'
6'
(14)
14'
16'
1'
7'
5'
17'
20'
(13)
13'
2'
8'
18'
4'
(12')
12'
19'
3'
9'
(9)
(12)
11'
10'
(10)
(10)
(11)

Ep.232.


(b)
c'
(a)
(a)
(f)
(e)
d'
(d)
(b)
(c)

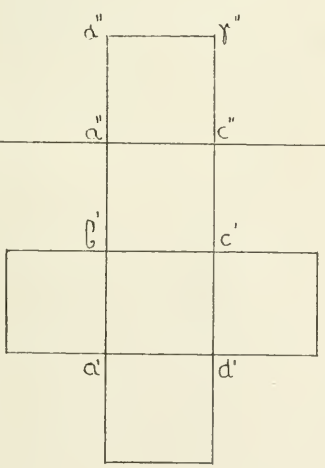

14
13
13
c"
c'

Ep. 234.

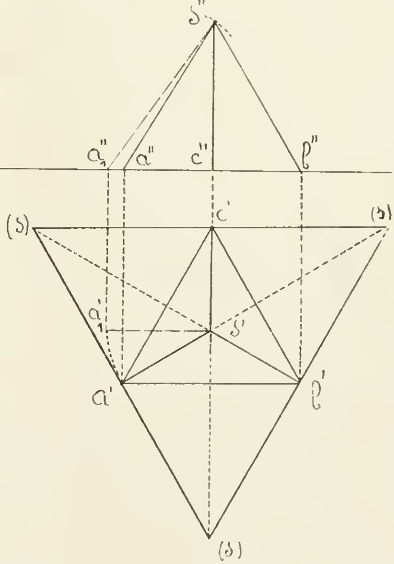


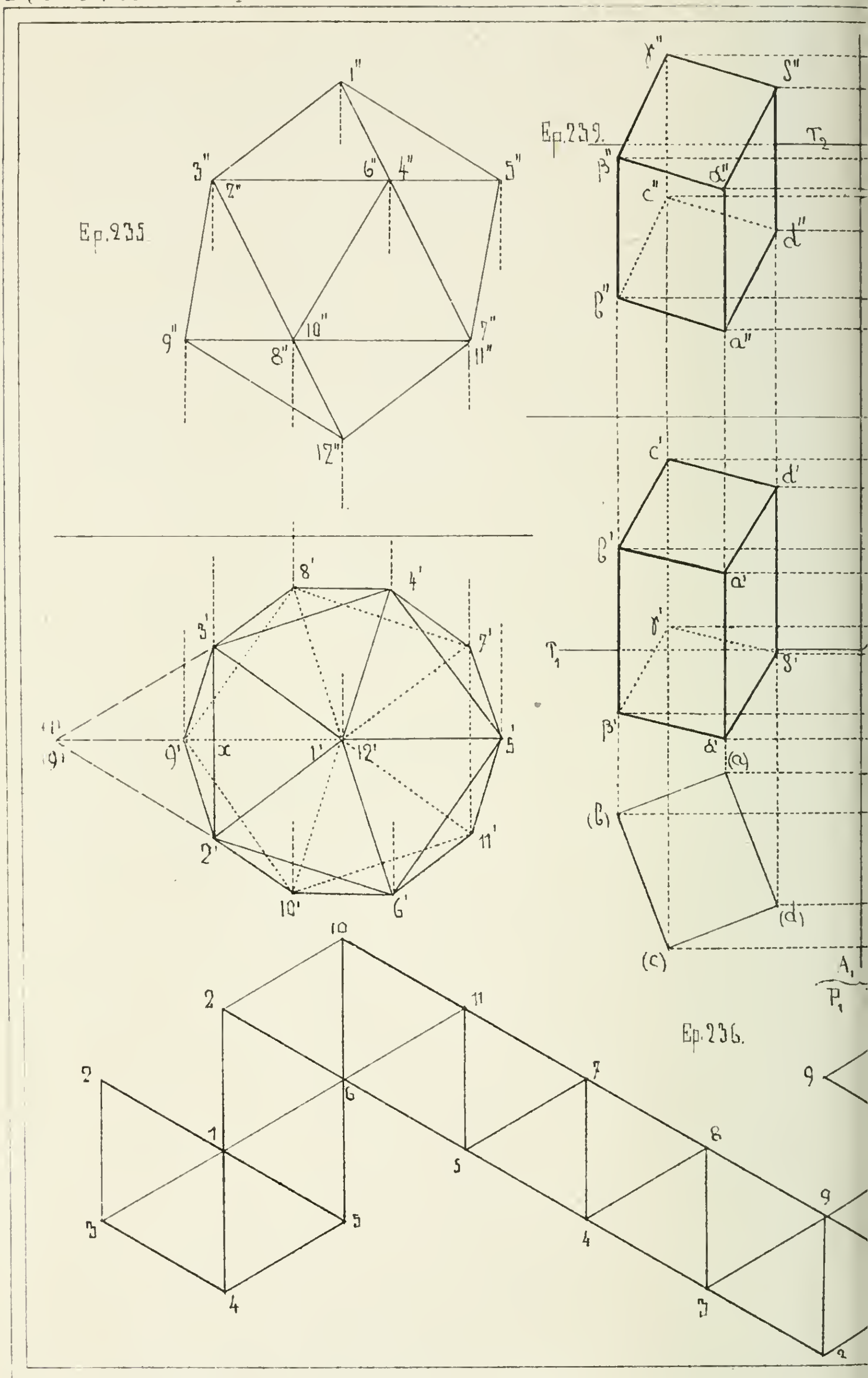
p. 232.

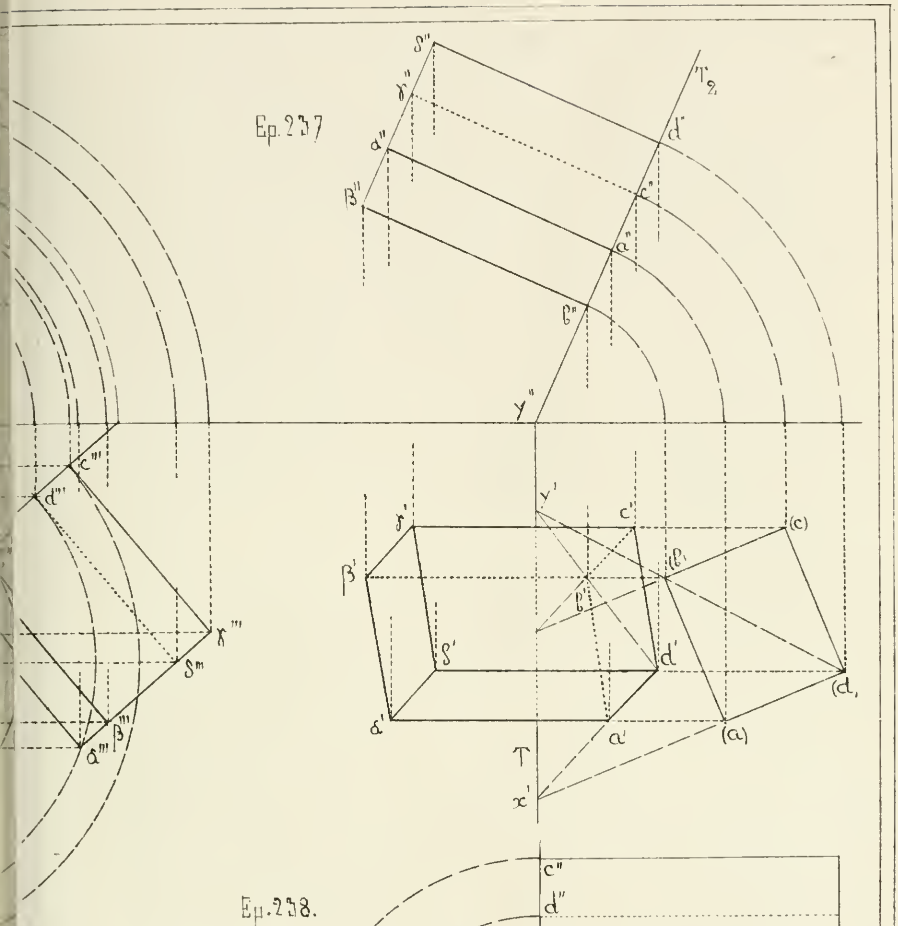
Ep. 231.

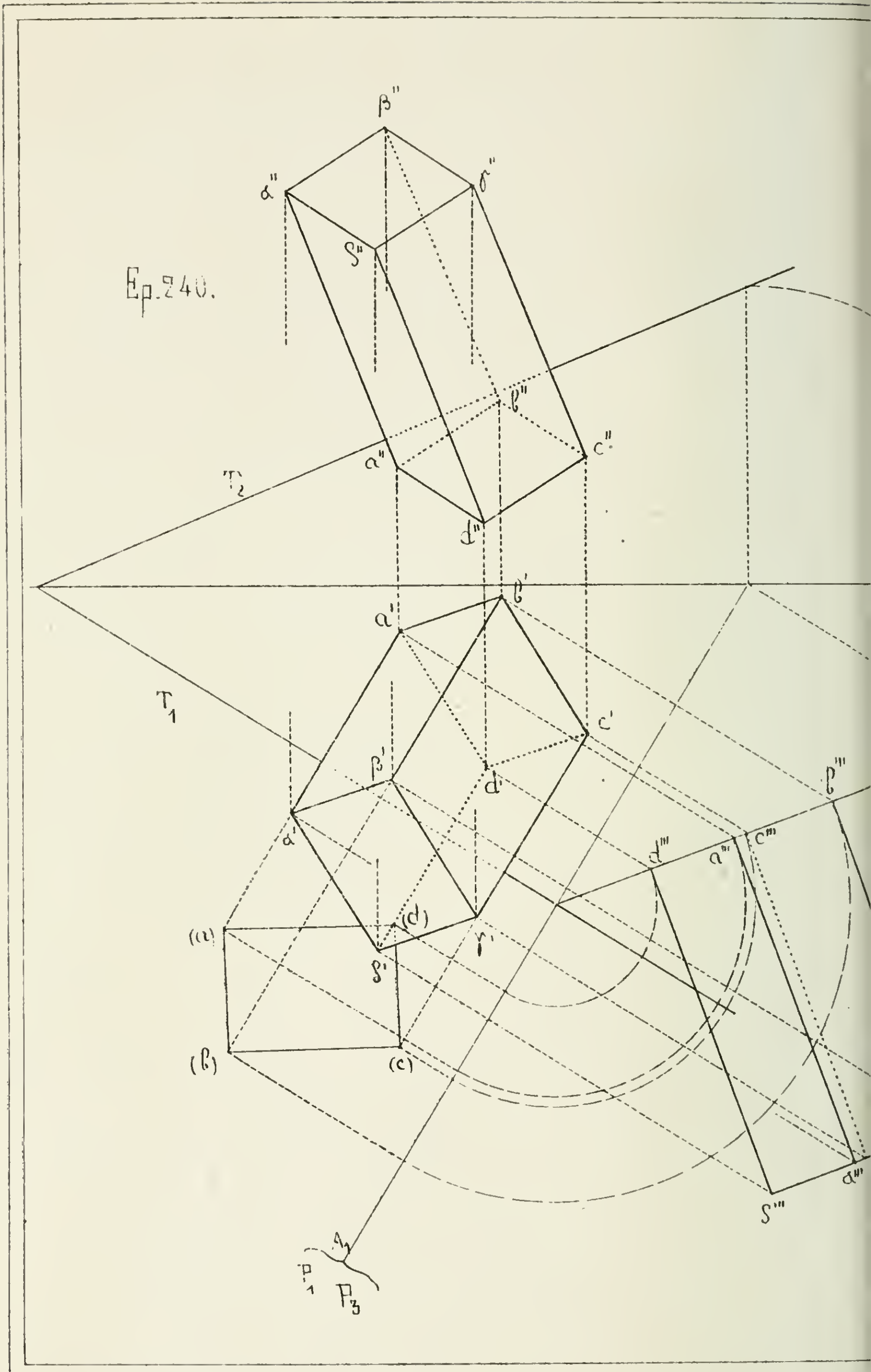


Ep. 230.



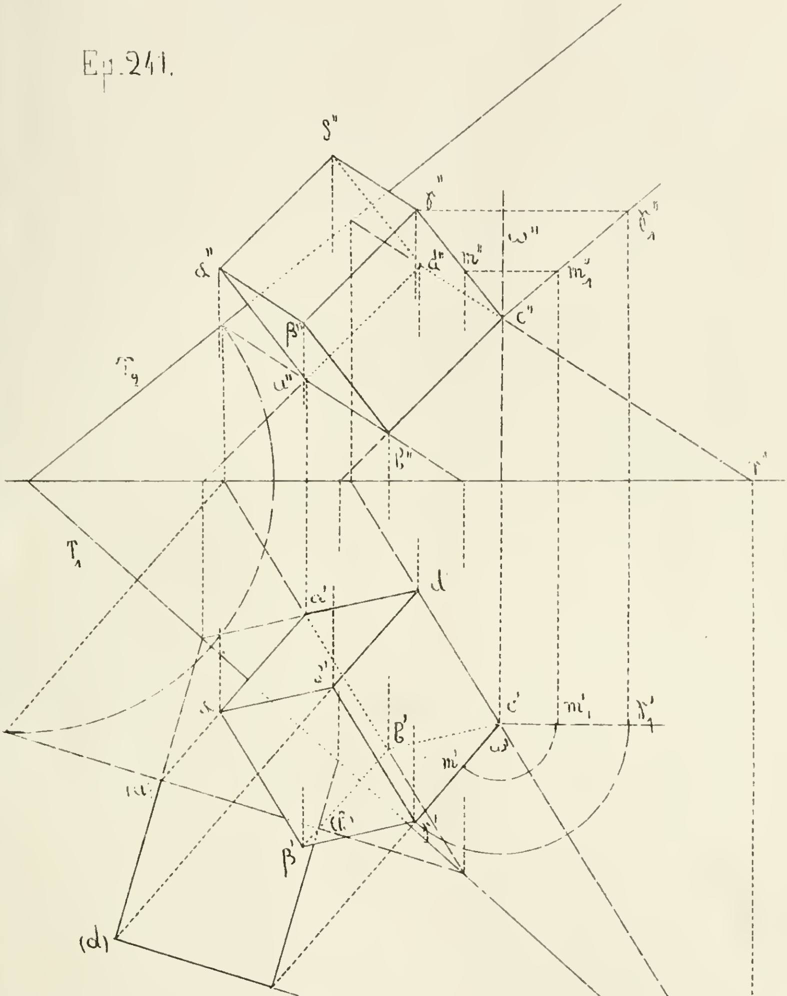

Ep.235.
Ep.239.
Ep.236.
T₂
T₁
A₁
P₁

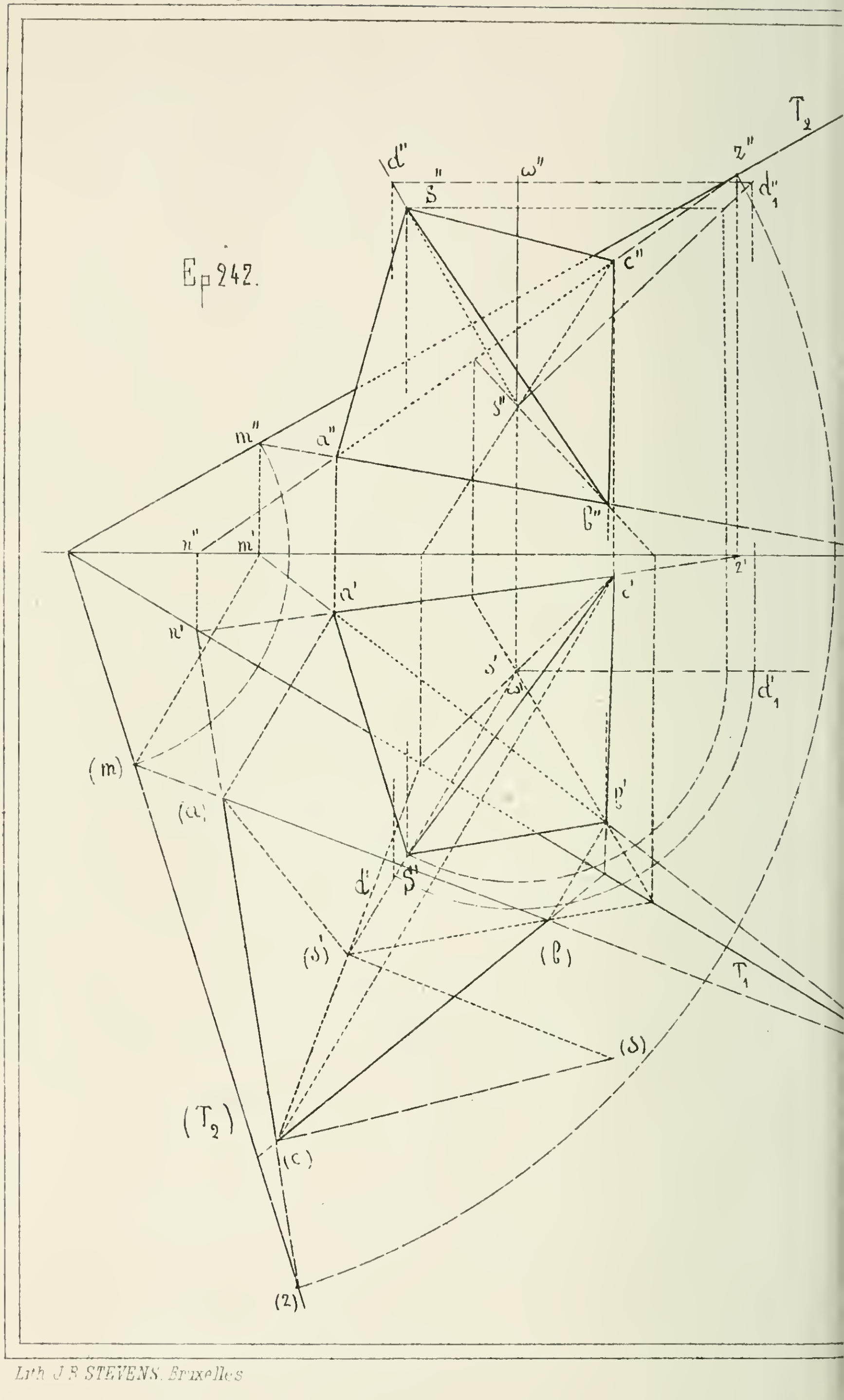

Ep. 237
Ep. 238.
T₂
T
T₁
x'
y'
y"



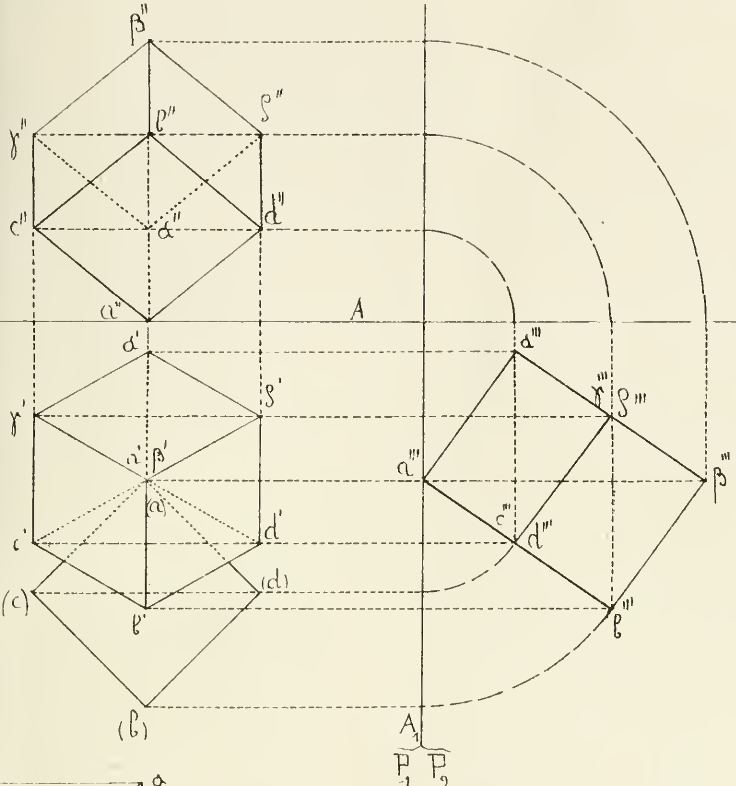
Lith. J. B. STEVENS Bruxelles

Ep. 241.





Lith J.B. STEVENS. Bruxelles



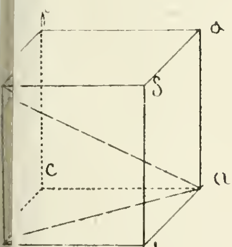
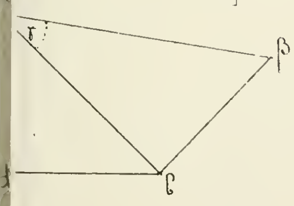


Fig. 244.

Fig. 245.



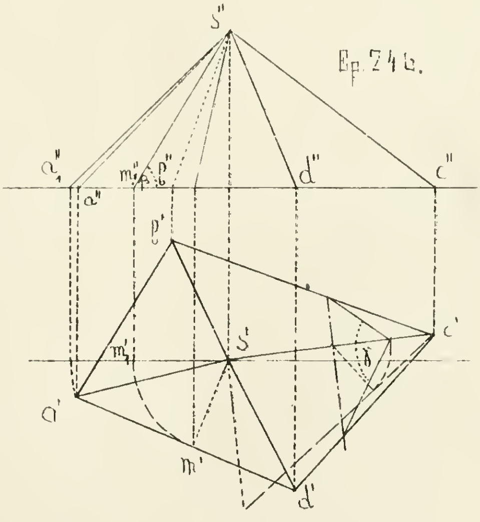
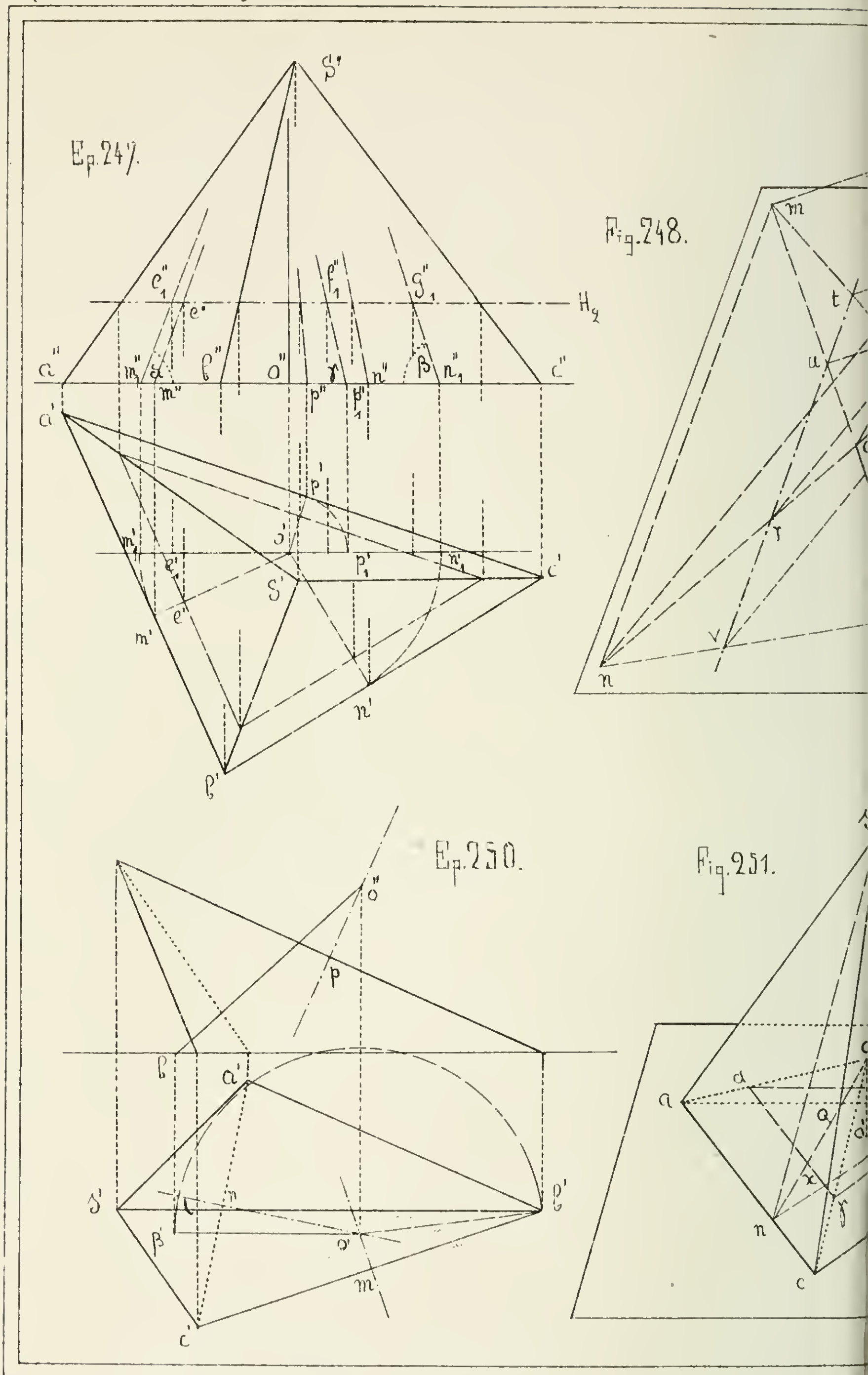
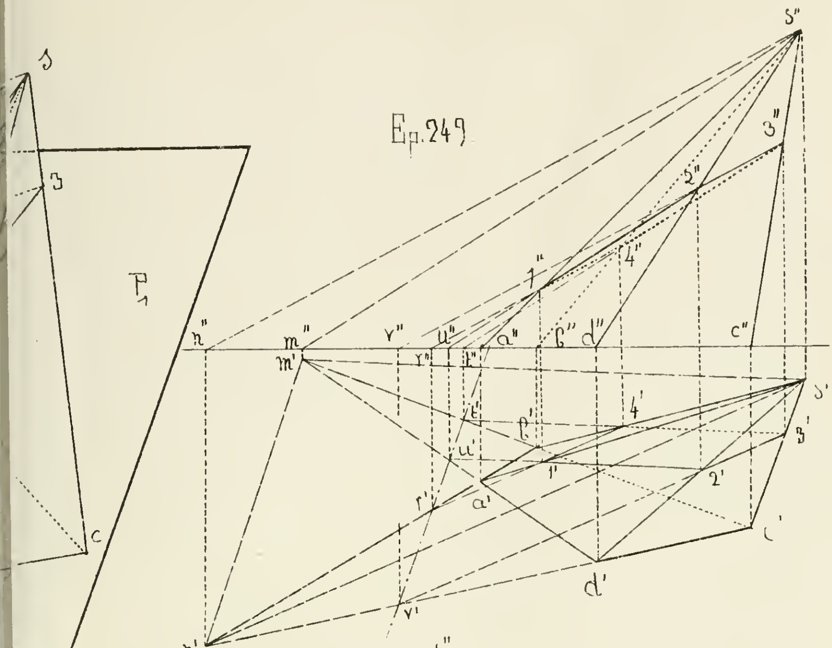


Fig. 246.

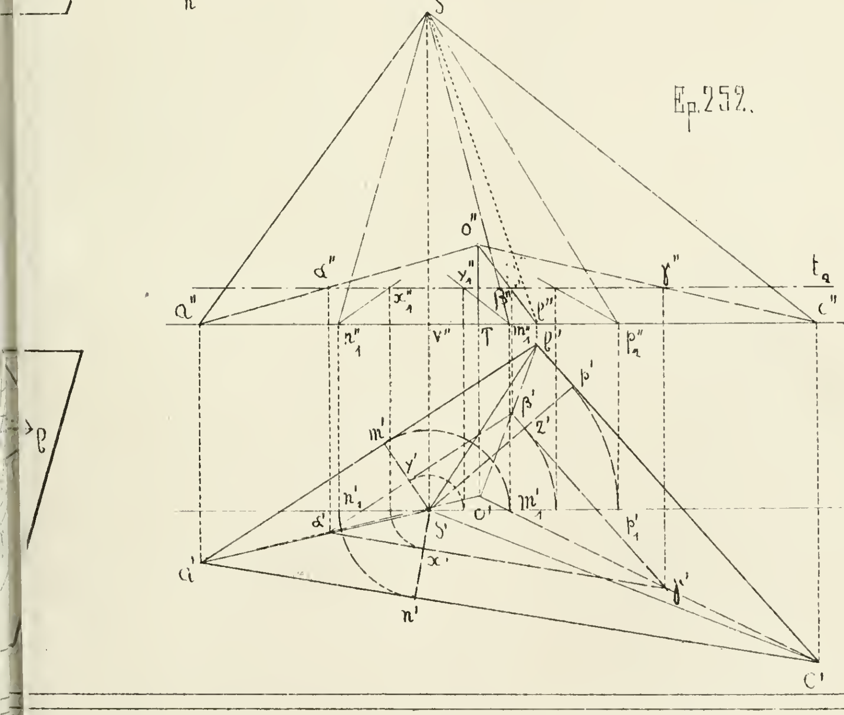


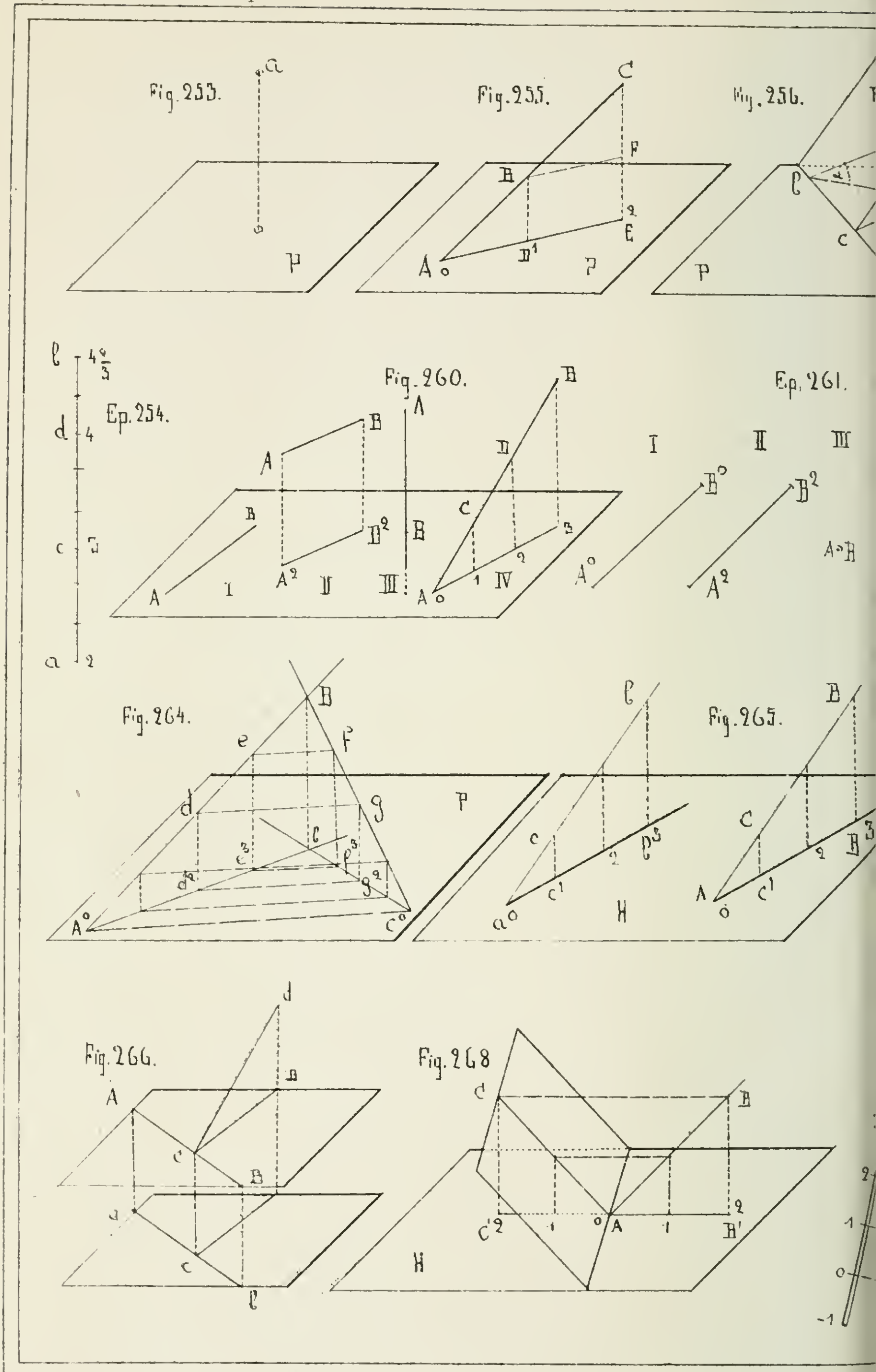
Lith J B STEVENS. Bruxelles

Ep. 249



Ep. 252.





Lith J B STEVENS Bruxelles

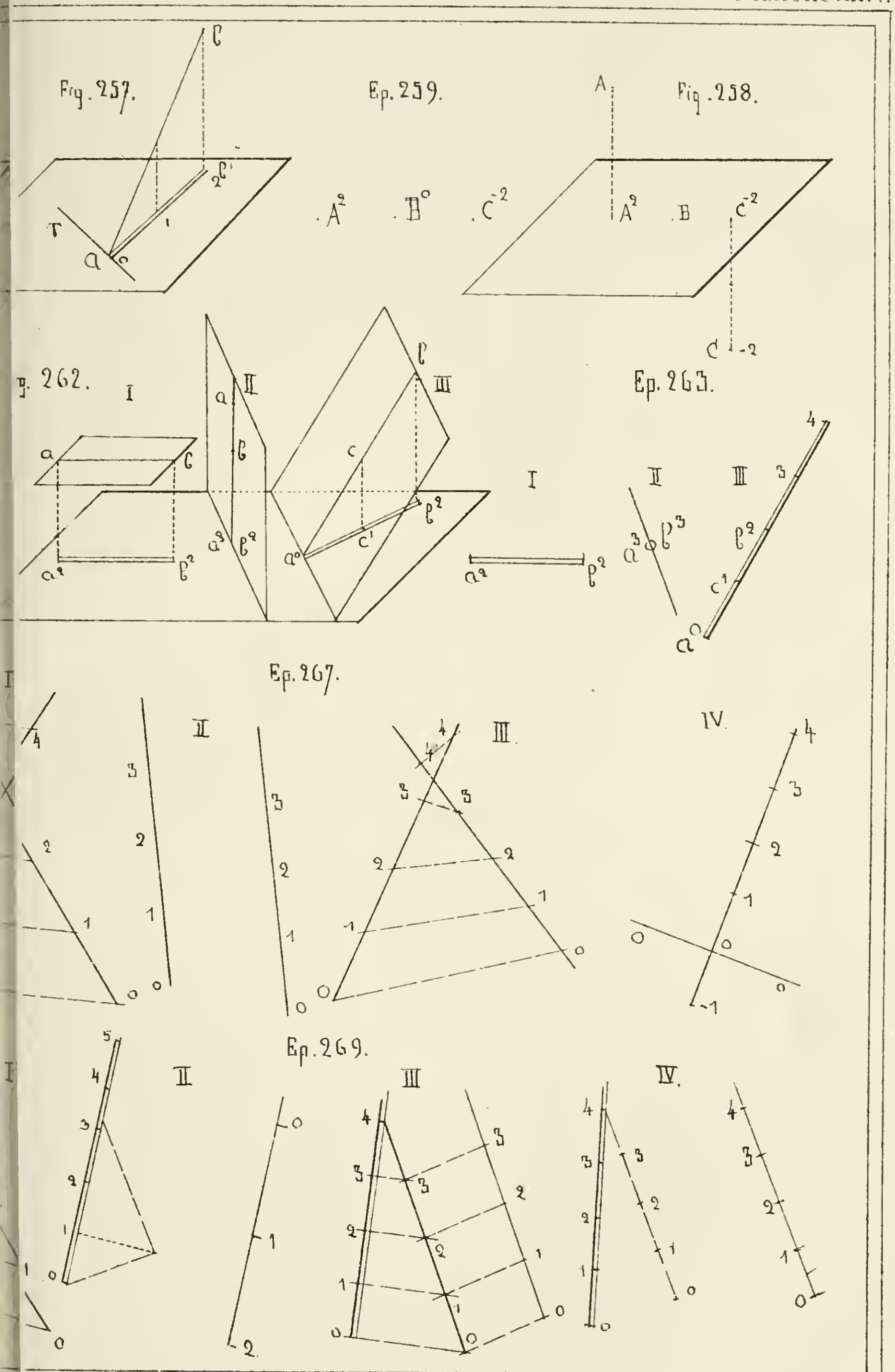
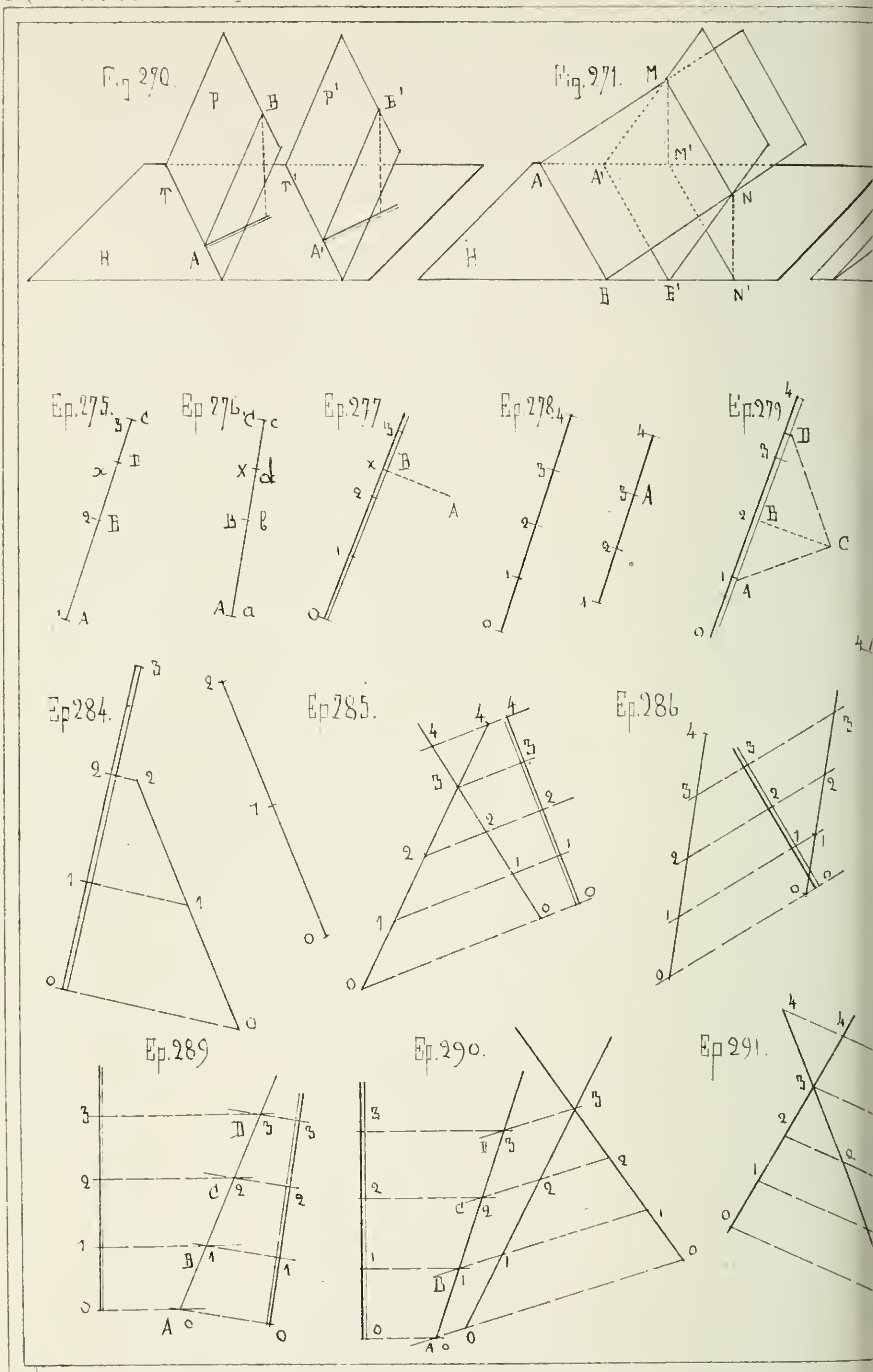


Fig. 257.
Fig. 259.
Fig. 258.
Fig. 262.
Fig. 263.
Fig. 267.
Fig. 269.



Lith. J.B STEVENS. Bruxelles

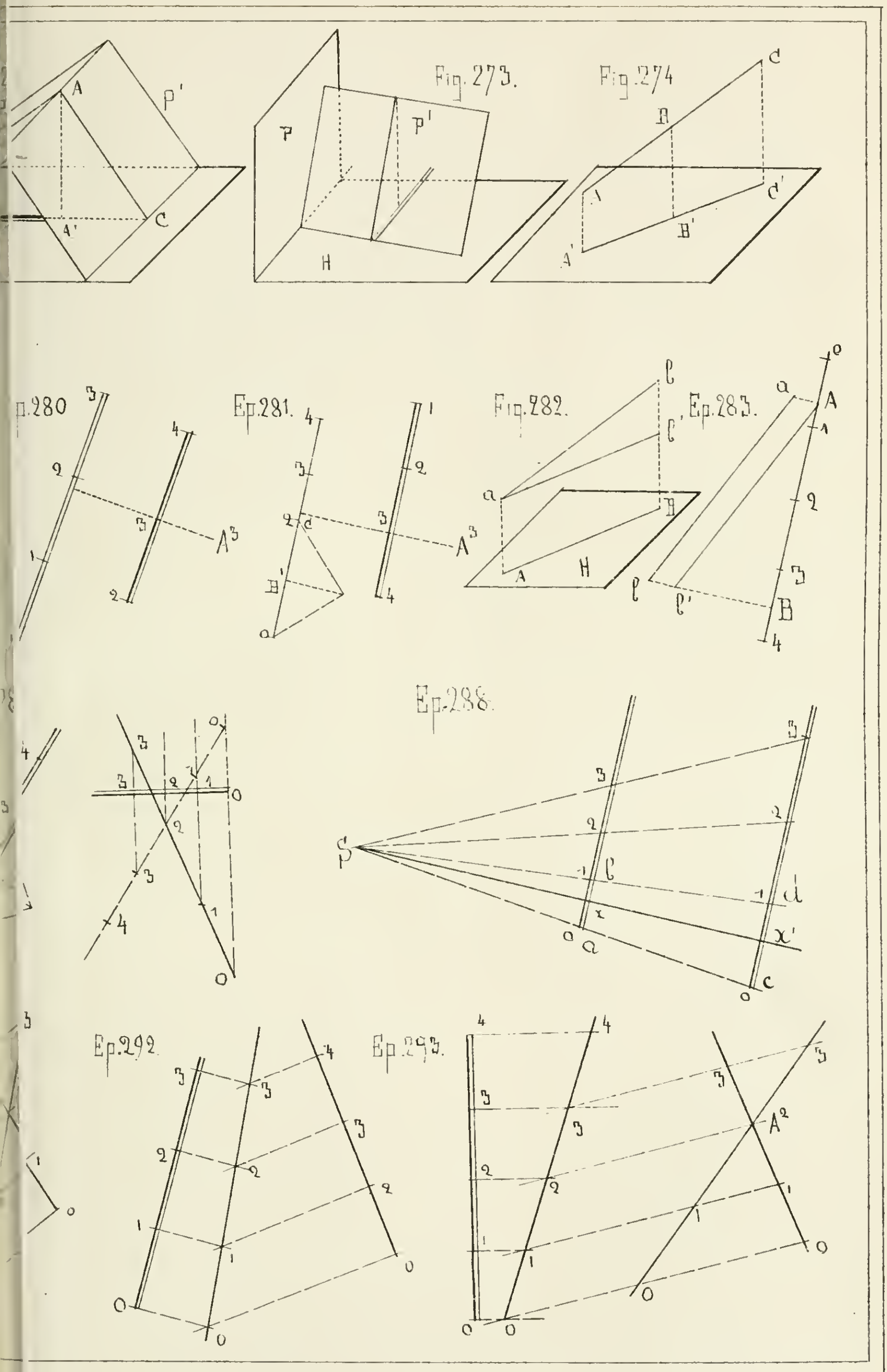
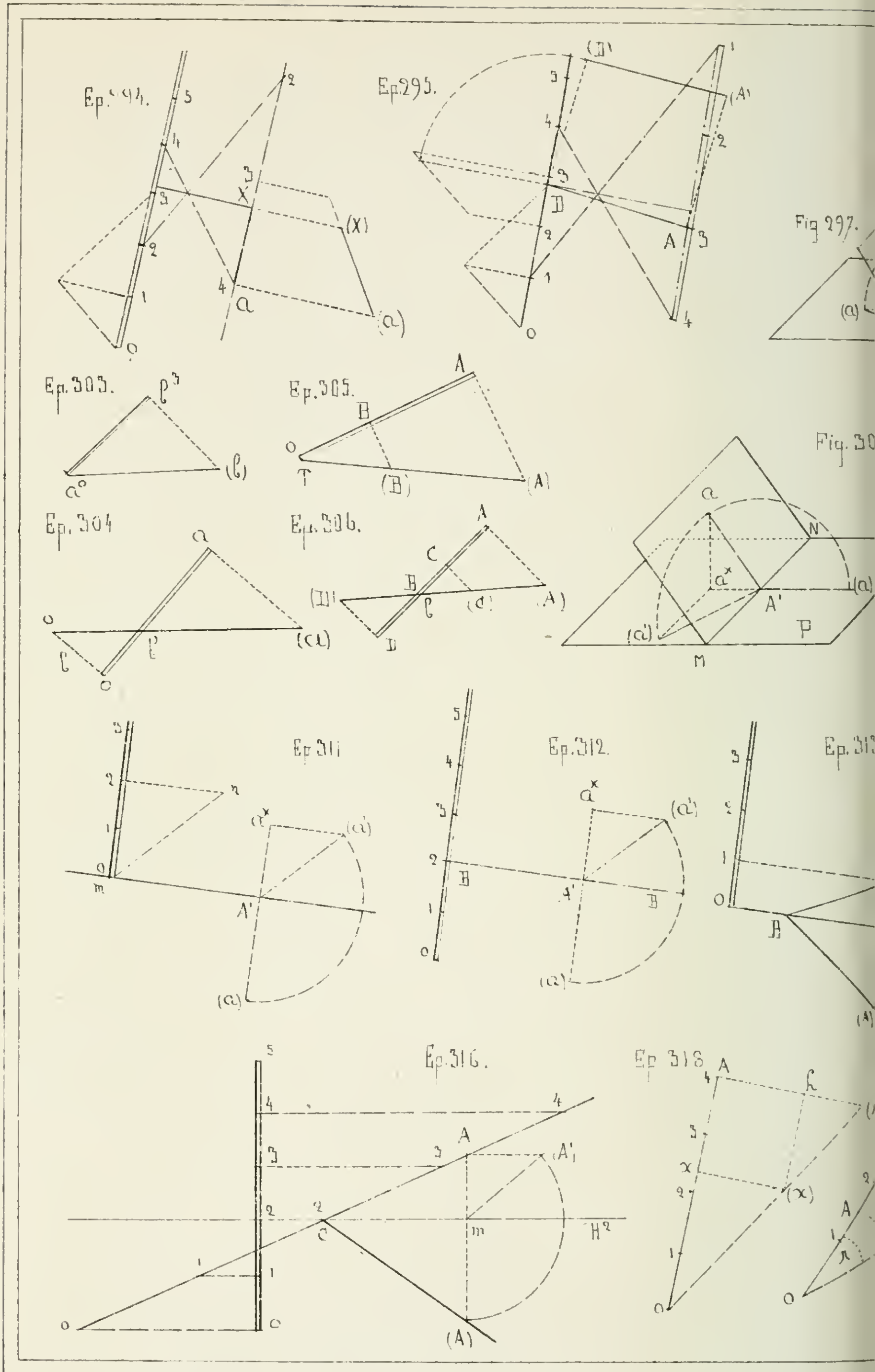
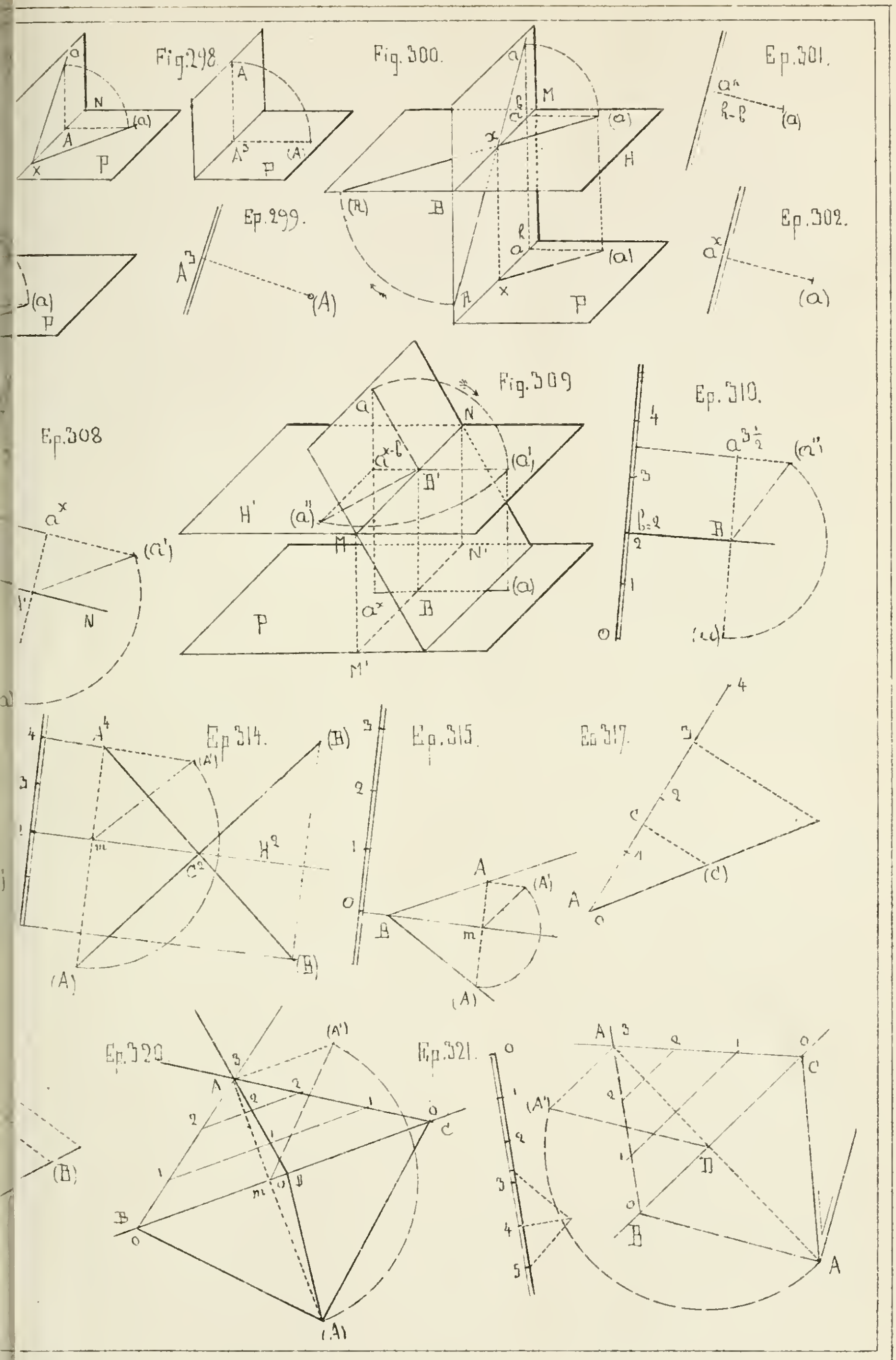


Fig. 273.
Fig. 274
p.280
Ep.281.
Fig.282.
Ep.283.
Ep.288.
Ep.292.
Ep.293.

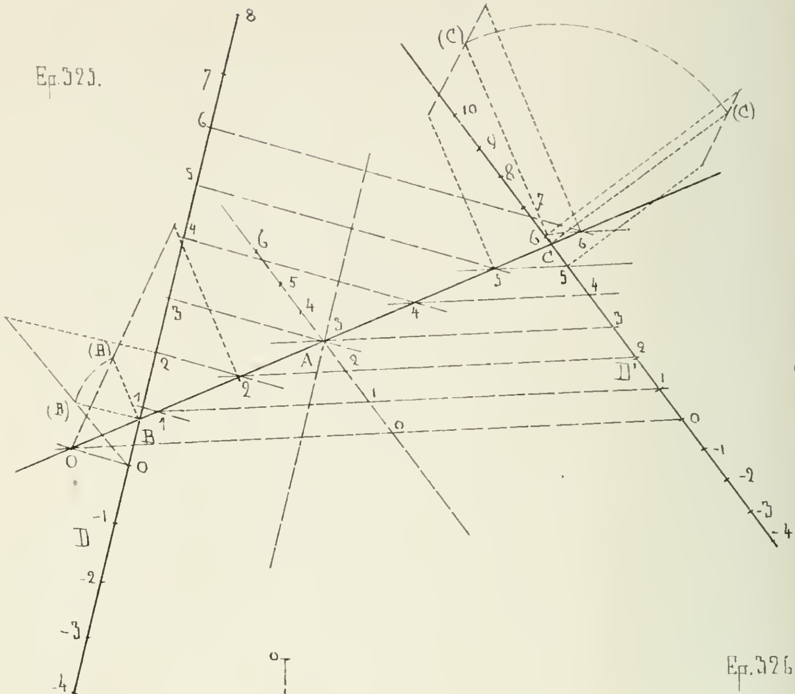


Lith. J.B. STEVENS Bruxelle.

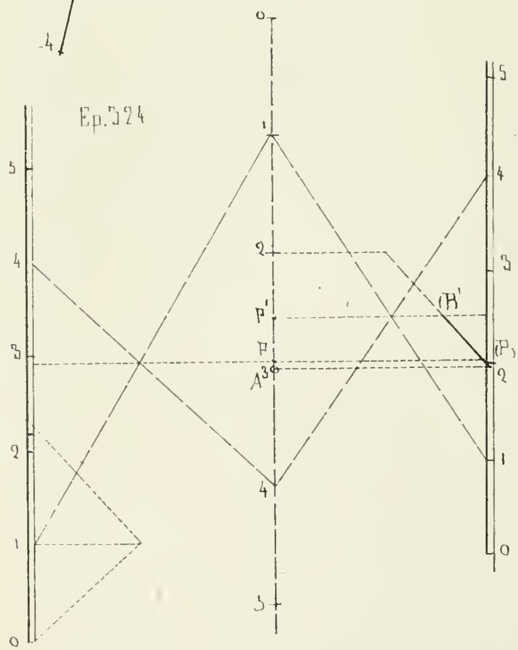
Planche XXIX



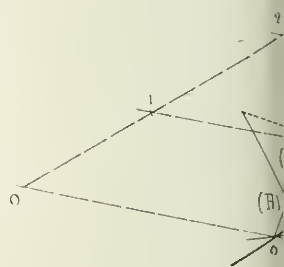
Ep.325.

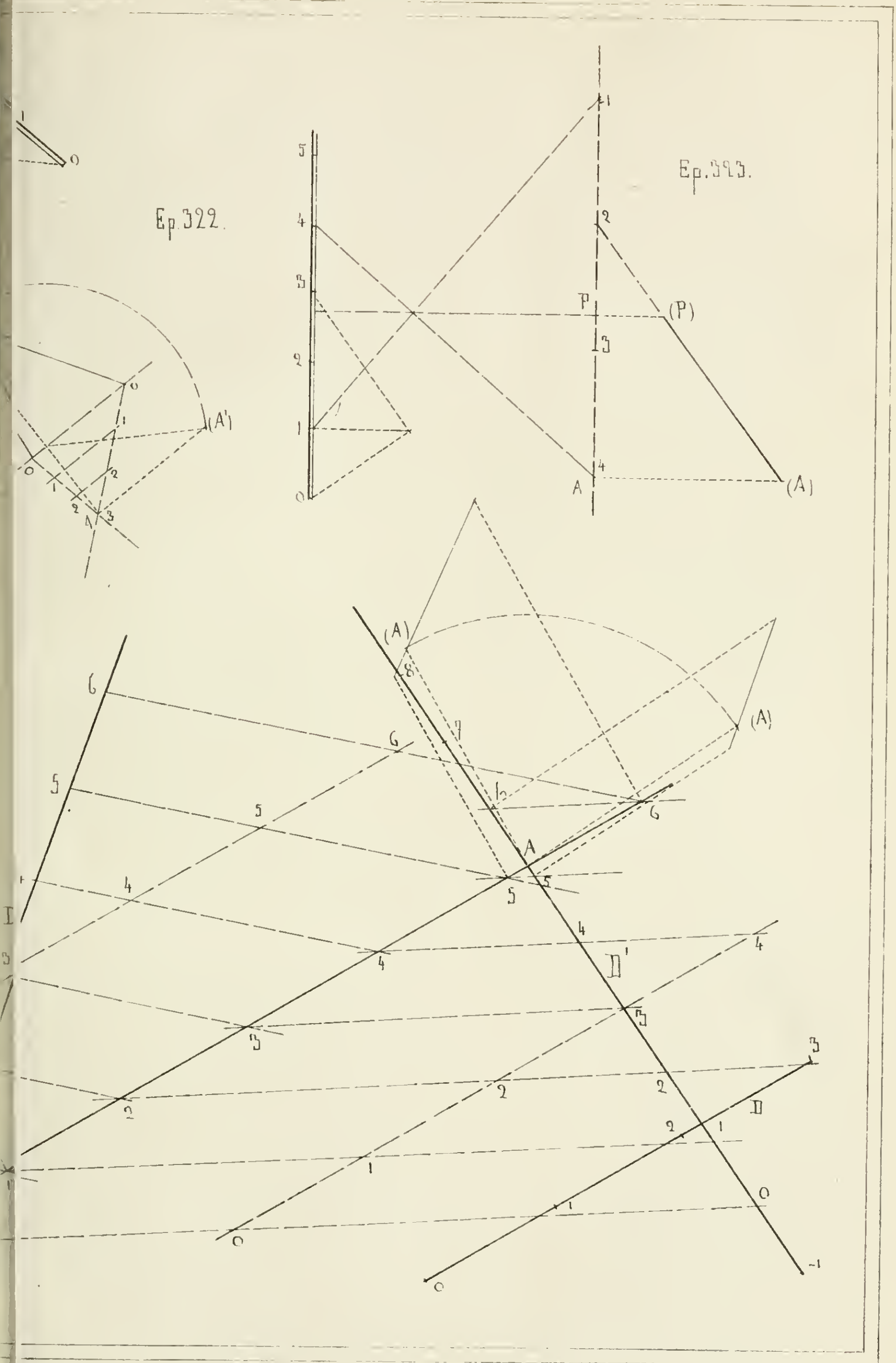


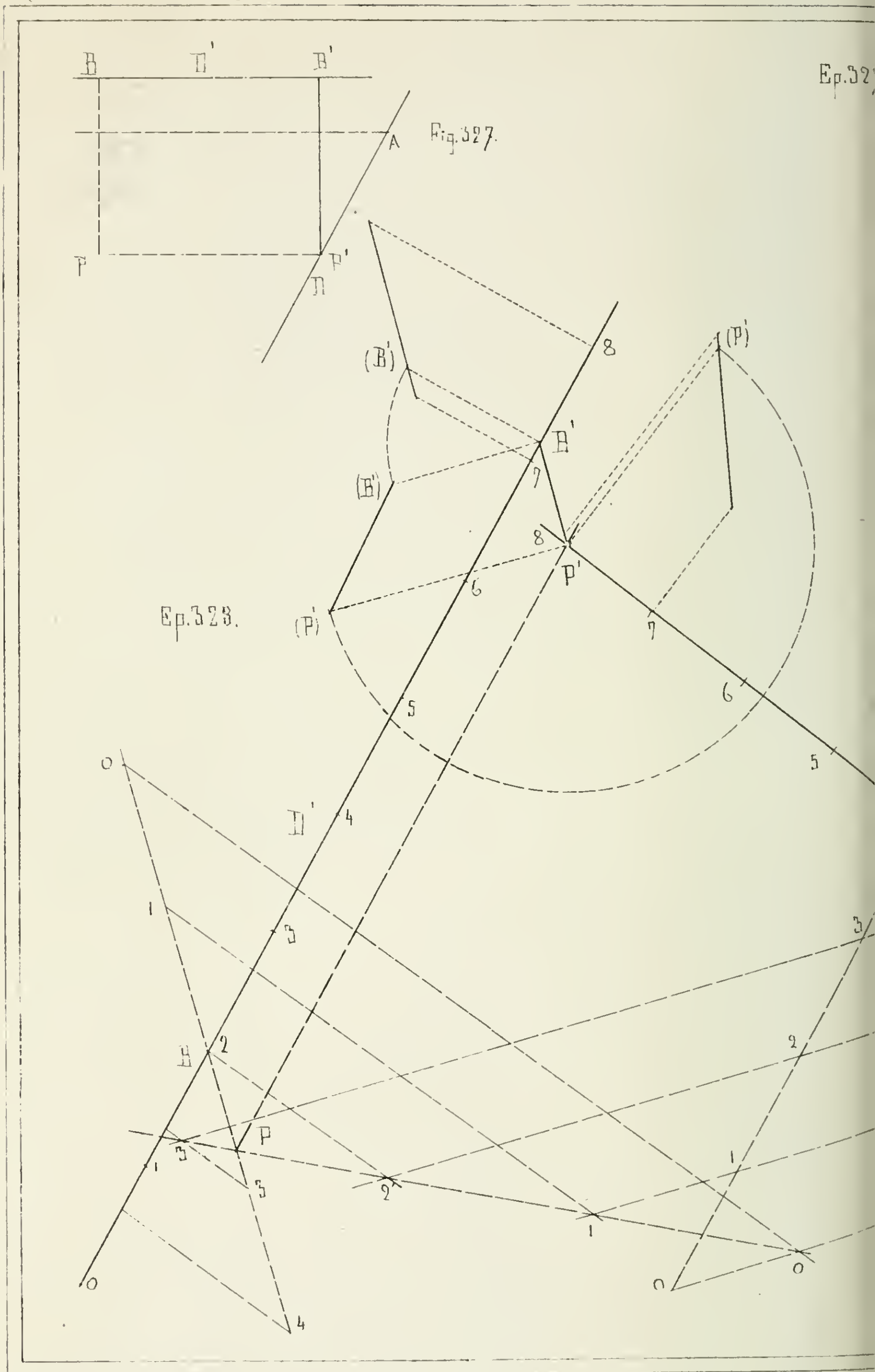
Ep.324



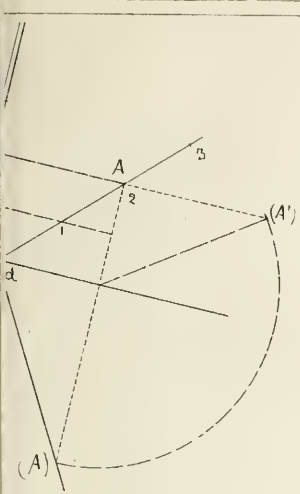
Ep.326.



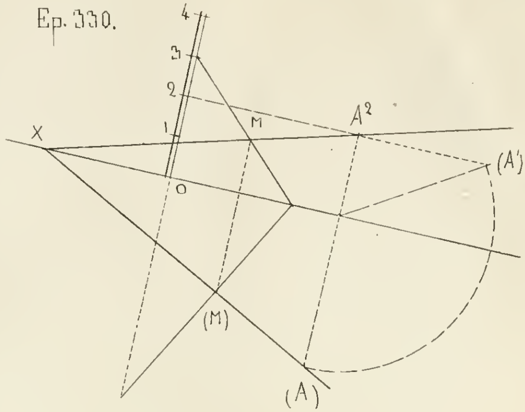

Ep.322.
Ep.323.
(A')
(P)
(A)
D'
D



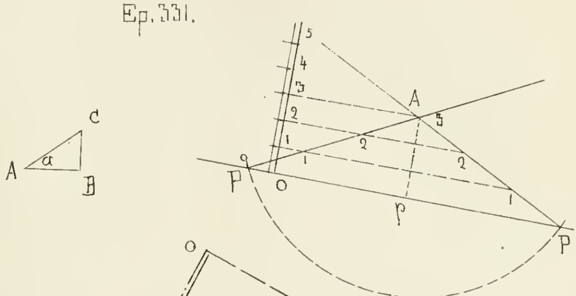
Lith. J. B. STEVENS Bruxelles



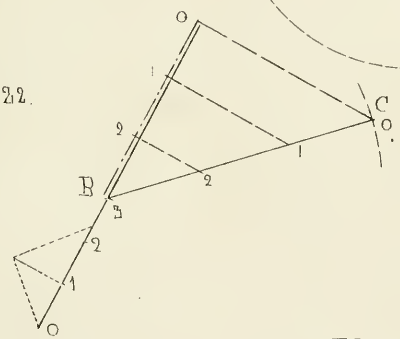
Ep. 330.

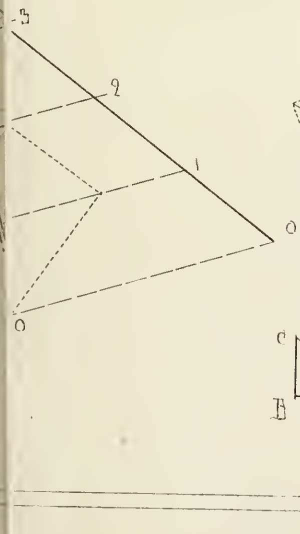


Ep. 331.



Ep. 322.





Ep. 333.